# Practico 6

**Ejercicio 1**

Encontrar las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$ la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

(a) $C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, \ldots$
(b) $C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, \ldots$
(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
(e) $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
(f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
(g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
(h) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$
(i) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$
(j) $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

a) $a_0 = C_0^6, \; a_1 = C_1^6, \; a_2 = C_2^6 \; \ldots \; a_6 = C_6^6, \; a_7 = 0, \; a_8 = 0 \; \ldots$

$$f(x) = C_0^6 + C_1^6 x + \boxed{C_2^6 x^2} + \boxed{C_3^6 x^3} + C_4^6 x^4 + C_5^6 x^5 + C_6^6 x^6$$
$$= (x+1)^6$$

$(a+b)(a+b) \;\ldots\; (a+b)$

$(x+1)(x+1) \;\ldots\; (x+1)$

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} C_i^k a^i b^{k-i}$$

$$(x+1)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_i^6 x^i 1^{6-i} = \sum_{i=0}^{6} C_i^6 x^i$$
$$= C_0^6 + C_1^6 x + C_2^6 x^2 + \ldots + C_6^6 x^6$$

b) $a_0 = C_1^6, \; a_1 = 2C_2^6, \; a_2 = 3C_3^6, \; a_3 = 4C_4^6, \; a_4 = 5C_5^6, \; a_5 = 6C_6^6, \ldots$

$$g(x) = C_1^6 + \boxed{2C_2^6 x} + \boxed{3C_3^6 x^2} + 4C_4^6 x^3 + 5C_5^6 x^4 + 6C_6^6 x^5$$

$$f(x) = C_0^6 + C_1^6 x + \boxed{C_2^6 x^2} + \boxed{C_3^6 x^3} + C_4^6 x^4 + C_5^6 x^5 + C_6^6 x^6 = (x+1)^6$$

$$g(x) = f'(x) = 6(x+1)^5$$

j) (j) $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

$$f(x) = x^2 + bx^3 + ax^4 + b^2x^5 + a^2x^6 + b^3x^7 + \ldots$$
$$= x^2 + (bx^3 + b^2x^5 + b^3x^7 + \ldots) + (ax^4 + a^2x^6 + a^3x^8 + \ldots)$$
$$= x^2 + bx^3(1 + bx^2 + b^2x^4 + \ldots) + ax^4(1 + ax^2 + a^2x^4 + \ldots)$$

$z = ax^2$

$y = bx^2$

$$= x^2 + bx^3(1 + y + y^2 + \ldots) + ax^4(1 + z + z^2 + \ldots)$$
$$= x^2 + bx^3 \frac{1}{1-y} + ax^4 \frac{1}{1-z}$$
$$= x^2 + \frac{bx^3}{1-bx^2} + \frac{ax^4}{1-ax^2}$$

$$(1+x)^k = C_0^k + C_1^k x + C_2^k x^2 + \dots + C_k^k x^k$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$bx^3 + b^2x^5 + b^3x^7 + \dots$$

$$\underbrace{bx^3} + \underbrace{bx^3}bx^2 + \underbrace{bx^3}b^2x^4 + \dots$$

$$= bx^3(1 + bx^2 + b^2x^4 + \dots)$$

Segundo semestre 2022

**Múltiple Opción 3**
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$ para todo $n \geq 1$ y $a_0 = 1$. Entonces:
A) $a_{50} = 2^{50}$; B) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$; C) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$; D) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} = 3\cdot 2^n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

1) solución general de la homogénea

$$a_n - 2a_{n-1} = 0$$

$p(\lambda) = \lambda - 2 \rightsquigarrow$ la única raíz es $\lambda = 2$

$$a_n^{(h)} = \alpha 2^n$$

2) una solución particular de la no homogénea

$$a_n - 2a_{n-1} = 3\cdot 2^n = \underset{\uparrow r}{2^n}\cdot \underbrace{3}_{g(n)}$$ polinomio de grado 0

$$C_2 a_{n+2} + C_1 a_{n+1} + C_0 a_n = r^n \underbrace{g(n)}_{\text{polinomio}}$$

* r no es raíz de $p(\lambda)$

$$a_n^{(p)} = r^n \underbrace{h(n)}_{\text{polinomio del mismo grado que } g}$$

→ * r es raíz simple de $p(\lambda)$

$$a_n^{(p)} = n\, r^n h(n)$$

* $r$ es raiz doble de $p(\lambda)$

$a_n^{(p)} = n^2 r^n h(n)$

Como 2 es raiz de $p(\lambda)$ vamos a buscar una solución particular de la forma $a_n^{(p)} = n 2^n \underbrace{h(n)}_{\text{polinomio de grado 0 genérico}}$

$h(n) = c$

$a_n^{(p)} = c n 2^n$

$a_{n-1}^{(p)} = c(n-1) 2^{n-1}$

$a_n^{(p)} - 2a_{n-1}^{(p)} = 3 \cdot 2^n \Rightarrow cn2^n - 2c(n-1)2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$

$\Rightarrow cn\cancel{2^n} - c(n-1)\cancel{2^n} = 3 \cdot \cancel{2^n}$

$\Rightarrow cn - c(n-1) = 3$

$\Rightarrow \cancel{cn} - \cancel{cn} + c = 3$

$\Rightarrow \boxed{c = 3}$

entonces $a_n^{(p)} = 3n2^n$

3 sumamos $a_n^{(h)}$ y $a_n^{(p)}$ y buscamos el parámetro

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha 2^n + 3n2^n$

$a_0 = 1 \Rightarrow \alpha \overbrace{2^0}^{=1} + \overbrace{3 \cdot 0 \cdot 2^0}^{=0} = 1$

$\Rightarrow \alpha = 1$

$a_n = 2^n + 3n2^n = (3n+1)2^n$

$a_{50} = (3 \cdot 50 + 1)2^{50} = 151 \cdot 2^{50}$

**Múltiple Opción 5**

Calcular la menor cantidad de estudiantes que deben realizar esta misma prueba para asegurar que al menos dos estudiantes entregan las mismas respuestas de la múltiple opción. Tener en cuenta que se pueden dejar recuadros en blanco: A) $5^6$; B) $5^6 + 1$; C) $4^6$; D) $4^6 + 1$.

6 preguntas de múltiple opción con 5 opciones cada una

posibilidades para la pregunta 2

# formas distintas de responder las 6 preguntas $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$

posibilidades para la pregunta 1

por el principio del palomar la menor cantidad de estudiantes es $5^6 + 1$.

**Múltiple Opción 1**

Contar la cantidad de subconjuntos de 4 elementos de $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ tales que la distancia entre toda pareja de elementos sea de 3 o más. A) $\binom{94}{3}$; B) $\binom{94}{4}$; C) $\binom{94}{5}$; D) $\binom{94}{6}$.

*Aclaración: dados $n < m$, la distancia entre $n$ y $m$ es $m - n$.*

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1, 2, \ldots, 100\}$

$x_1 \geq 1$

$x_2 - x_1 \geq 3$

$x_3 - x_2 \geq 3$

$x_4 - x_3 \geq 3$

$100 - x_4 \geq 0$

$\{x_1 \xrightarrow{+3} x_2 \xrightarrow{+3} x_3 \xrightarrow{+3} x_4\}$

$$\overbrace{x_1}^{y_1} + \overbrace{(x_2 - x_1)}^{y_2} + \overbrace{(x_3 - x_2)}^{y_3} + \overbrace{(x_4 - x_3)}^{y_4} + \overbrace{(100 - x_4)}^{y_5} = 100$$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 100$

$y_1 \geq 1$

$y_2 \geq 3$

$y_3 \geq 3$

$y_4 \geq 3$

$y_5 \geq 0$

$y_1 \leq 7$

$y_2 = x_2 - x_1 \longrightarrow y_2 + x_1 = x_2$

una solución:

$y_1 = 4 \longrightarrow x_1 = 4$

$y_2 = 3 \longrightarrow x_2 = 7$

$y_3 = 5 \longrightarrow x_3 = 12$

$y_4 = 3 \longrightarrow x_4 = 15$

$y_5 = 85$

cantidad de soluciones de:

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 90$ con $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, $y_5 \geq 0$

cantidad de soluciones es $CR^5_{90}$

$$CR_{90}^{5} = C_{90}^{5+90-1} = C_{90}^{94} = \frac{94!}{90!(94-90)!} = \frac{94!}{90!\,4!} = \frac{94!}{4!(94-4)!} = C_4^{94}$$

$$C_{90}^{94} = \frac{94!}{90!(94-90)!} = \frac{94!}{90!\,4!}$$

$$C_k^{n} = C_{n-k}^{n}$$

$$C_4^{94} = \frac{94!}{4!(94-4)!} = \frac{94!}{4!\,90!}$$

$$C_{90}^{94} = C_{94-90}^{94} = C_4^{94}$$

**Múltiple Opción 3**

Hallar el menor entero positivo $n$ para el cual no es posible entregar 100 caramelos a $n$ niños de modo que todos reciban distintas cantidades. Se asume que no es posible partir caramelos, y que todo niño recibe al menos un caramelo. Opciones: A) 12; B) 13; C) 14; D) 15.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 100 - n \quad \text{con } x_i \geq 0$$

las palomas son los n niños

los nidos = las cantidades de caramelos que se le puede dar a cada niño

$$0, 1, 2, \dots, 100-n$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 100$$

$$1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \dots < x_n$$

$$1 = x_1 < \underset{2}{\underset{\parallel}{x_2}} < \underset{3}{\underset{\parallel}{x_3}} < \underset{4}{\underset{\parallel}{x_4}} < \underset{5}{\underset{\parallel}{x_5}}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 12 \rightsquigarrow 78$

$n = 13 \rightsquigarrow 91$

$n = 14 \rightsquigarrow 105$

$n = 13$: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ \dots,\ x_{12} = 12,\ x_{13} = 13 + 9$ ✓

$n = 14$: $\underbrace{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ \overset{x_9 = 9}{\dots},\ x_{12} = 12,\ x_{13} = 13}_{\text{usamos 91 caramelos}},\ x_{14} = 9$

entonces la mínima cantidad de niños es 14