Ejercicio 2
Determinar la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

(a) $f(x) = (2x-3)^3$
(b) $f(x) = x^3/(1-x)$
(c) $f(x) = x^3/(1-x^2)$
(d) $f(x) = 1/(1+3x)$
(e) $f(x) = 1/(2-x)$
(f) $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1-x)$

$a_0, a_1, a_2 \ldots \longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$

buscamos escribir $f(x)$ como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x} = x^3 \frac{1}{1-x}$$
$$= x^3 (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$
$$= x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$
$$= 0 + 0x + 0x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

sucesión generada:
$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1\ \ a_4 = 1, \ldots$

f) $f(x) = 3x^6 - 9 + \dfrac{1}{1-x} = 3x^6 - 9 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$= 3x^6 - 9 + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \ldots$$
$$= -8 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 4x^6 + x^7 + x^8 + \ldots$$

sucesión generada: $-8, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, \ldots$

$1 + x + x^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$

$$= \frac{1}{1-(-3x)} \quad y = -3x$$
$$= \frac{1}{1-y}$$
$$= 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots$$
$$= 1 + (-3x) + (-3x)^2 + (-3x)^3 + \ldots$$
$$= 1 - 3x + (-3)^2 x^2 + (-3)^3 x^3 + \ldots$$

$= 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \dots$

sucesión generada: $a_0 = 1$

$a_1 = -3$

$a_2 = 9$

$a_3 = -27$

$a_n = (-3)^n$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n$$

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

e) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

$$= \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-y} \qquad y = \frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + y + y^2 + y^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

sucesión generda: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

$a_0 = \frac{1}{2} \quad a_1 = \frac{1}{2^2} \quad a_2 = \frac{1}{2^3}$

$a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ $\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n$

a) $f(x) = (2x-3)^3$

$$= \underbrace{C_0^3}_{1=}(2x)^3(-3)^0 + \overset{3}{\overset{\shortparallel}{C_1^3}}(2x)^2(-3)^1 + \overset{3}{\overset{\shortparallel}{C_2^3}}(2x)^1(-3)^2 + \underbrace{C_3^3}_{=1}(2x)^0(-3)^3$$

$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

sucesión generada: $a_0 = -27$, $a_1 = 54$, $a_2 = -36$, $a_3 = 8$, $a_n = 0$ si $n \geq 4$

Combinaciones negativas

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^i b^{n-i}$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i$$

$$\boxed{\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{-n} x^i}$$

definición: $C_i^{-n} = (-1)^i CR_i^n = (-1)^i C_i^{n+i-1}$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = (1+(-x))^{-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{-1} (-x)^i$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i CR_i^1 (-x)^i$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^i} CR_i^1 \underbrace{(-1)^i} x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{1+i-1} x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} C_i^i x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

$(-1)^i (-1)^i = (-1)^{2i} = 1$

Ejercicio 3

(a) Hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{10}$.
(b) Para cada n natural, hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.

a) queremos $(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)^{10} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para obtener a_8

$$f(x) = (1+x+x^2+\dots)^{10} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{10}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^{10}}$$
$$= \frac{1}{(1+y)^{10}}$$

$y = -x$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{-10} y^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i CR_i^{10} (-x)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i CR_i^{10} (-1)^i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^{10} x^i$$

$\Rightarrow$ el coeficiente de x^8 es CR_8^{10}

(d) Hallar el coeficiente de x^{15} en las funciones

- $x^3(1-2x)^{10}$.
- $(x^3-5x)/(1-x)^3$.
- $(1+x)^4/(1-x)^4$.

coeficiente de x^{15} en

$$\frac{1}{(1+y)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{-n} y^i$$

$$f(x) = \frac{x^3-5x}{(1-x)^3}$$

$$= (x^3-5x)\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$= (x^3-5x)\frac{1}{(1+(-x))^3}$$

$$= (x^3-5x)\frac{1}{(1+y)^3} \qquad y=-x$$

$$= (x^3-5x)\sum_{i=0}^{\infty} C_i^{-3} y^i$$

$$= (x^3-5x)\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i CR_i^3 (-x)^i$$

$$= (x^3-5x)\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i CR_i^3 (-1)^i x^i$$

$$= (x^3-5x)\sum_{i=0}^{\infty} CR_i^3 x^i$$

$$= x^3\sum_{i=0}^{\infty} CR_i^3 x^i - 5x\sum_{i=0}^{\infty} CR_i^3 x^i$$

el coeficiente de x^{12} en $\sum_{i=0}^{\infty} CR_i^3 x^i$ es: CR_{12}^3

el coeficiente de x^{14} en $\sum_{i=0}^{\infty} CR_i^3 x^i$ es: CR_{14}^3

en $f(x)$ va a aparecer: $x^3 CR_{12}^3 x^{12} - 5x\, CR_{14}^3 x^{14}$

$$(CR_{12}^3 - 5\,CR_{14}^3)\, x^{15}$$

el coeficiente de x^{15} es $CR^3_{12} - 5CR^3_{14}$

Ejercicio 6
Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros sólo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

a_n = cantidad de formas que el cajero puede dar n pesos

$a_1 = 0$
$a_2 = 0$
$\vdots$
$a_{100} = 1$
$a_{101} = 0$
$\vdots$
$a_{200} = 2$ ⇝ dos billetes de 100 o un billete de 200
$\vdots$
$a_{300} = 2$ ⇝ tres billetes de 100 o uno de 200 y uno de 100
$\vdots$
$a_{400} = 3$ ⇝ 4 billetes de 100 / 2 billetes de 200 / 2 billetes de 100 y 1 de 200

$a_n = 0$ si n no es multiplo de 100

$$\underbrace{(0\ 100\ \boxed{200}\ 300\ \boxed{400} \dots)}_{\text{billetes de 100}}\ \underbrace{(0\ \boxed{200}\ \boxed{400} \dots)}_{\text{billetes de 200}}\ \underbrace{(0\ 500\ 1000 \dots)}_{\text{billetes de 500}}\ \underbrace{(0\ 1000\ 2000 \dots)}_{\text{billetes de 1000}}$$

$$\underbrace{(1 + x^{100} + \boxed{x^{200}} + x^{300} + \boxed{x^{400}} + \dots)(1 + \boxed{x^{200}} + \boxed{x^{400}} + \dots)}_{a_{400} = 3}(1 + x^{500} + x^{1000} + \dots)(1 + x^{1000} + x^{2000} + \dots)$$

coeficiente de x^{400} es 3

coeficiente de x^{400} es a_{400}

---

solamente billetes de 100

$a_n^{(100)}$ = cantidad de formas de dar n pesos en billetes de 100

$a_0^{(100)} = 1$
$a_1^{(100)} = 0$
$\vdots$
$a_{99}^{(100)} = 0$
$a_{100}^{(100)} = 1$
$\vdots$
$a_{200}^{(100)} = 1$

$$a_n^{(100)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ multiplo de } 100 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$f^{(100)}(x) = 1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + \dots$$

solamente billetes de 200

$a_n^{(200)}$ = cantidad de formas de dar n pesos en billetes de 200

$a_0^{(200)} = 1$

$a_1^{(200)} = 0$

$\vdots$

$a_{200}^{(200)} = 1$

$a_{300}^{(200)} = 0$

$\vdots$

$a_{400}^{(200)} = 1$

$$a_n^{(200)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ múltiplo de } 200 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$f^{(200)}(x) = 1 + x^{200} + x^{400} + x^{600} + \dots$$

solamente billetes de 500

$$a_n^{(500)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 500 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$f^{(500)}(x) = 1 + x^{500} + x^{1000} + \dots$$

solamente billetes de 1000

$$a_n^{(1000)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ múltiplo de } 1000 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$f^{(1000)}(x) = 1 + x^{1000} + x^{2000} + \dots$$

$$(1 + \underbrace{x^{100}} + \underbrace{x^{200}} + x^{300} + \dots)(\underbrace{1} + x^{200} + \underbrace{x^{400}} + \dots)(\underbrace{1} + \underbrace{x^{500}} + x^{1000} + \dots)(\underbrace{1} + x^{1000} + x^{2000} + \dots)$$

coeficiente x^{600}:

una forma de llegar a x^{600}: $\underbrace{x^{100} \cdot 1 \cdot x^{500} \cdot 1}$

dar 600 pesos con 1 billete de 100 y uno de 500

otra forma de llegar a x^{600}: $\underbrace{x^{200} \cdot x^{400} \cdot 1 \cdot 1}$

dar 600 pesos con 2 billetes de 100 y dos billetes de 200

a_n = cantidad de formas de dar n pesos en billetes de 100, 200, 500 y 1000

$\Rightarrow a_n$ es el coeficiente de x^n

$$\underbrace{(1+x^{100}+x^{200}+\dots)(1+x^{200}+x^{400}+\dots)(1+x^{500}+x^{1000}+\dots)(1+x^{1000}+x^{2000}+\dots)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$$

entonces la función generatriz de a_n es

$$(1+x^{100}+x^{200}+\dots)(1+x^{200}+x^{400}+\dots)(1+x^{500}+x^{1000}+\dots)(1+x^{1000}+x^{2000}+\dots)$$

$$1+x^{100}+x^{200}+x^{300}+\dots = 1+x^{100}+(x^{100})^2+(x^{100})^3+\dots$$

$$y=x^{100} \rightsquigarrow = 1+y+y^2+y^3+\dots$$

$$= \frac{1}{1-y}$$

$$= \frac{1}{1-x^{100}}$$

$$1+x^{200}+x^{400}+x^{600}+\dots = 1+x^{200}+(x^{200})^2+(x^{200})^3+\dots$$

$$y=x^{200} \quad = 1+y+y^2+y^3+\dots$$

$$= \frac{1}{1-y}$$

$$= \frac{1}{1-x^{200}}$$

$$1+x^{500}+x^{1000}+x^{1500}+\dots = \frac{1}{1-x^{500}}$$

$$1+x^{1000}+x^{2000}+x^{3000}+\dots = \frac{1}{1-x^{1000}}$$

función generatriz de a_n:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^{100}} \cdot \frac{1}{1-x^{200}} \cdot \frac{1}{1-x^{500}} \cdot \frac{1}{1-x^{1000}}$$