Practico 5 - ejercicio 5

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

$$\begin{cases} e_{n+1} = 2e_n + 2^n & \text{para todo } n\in\mathbb{N} \\ e_0 = 0 \end{cases}$$

$$e_{n+1} = 2e_n + 2^n \rightsquigarrow \boxed{e_{n+1} - 2e_n = 2^n}$$

(1) solución general de la homogénea

$$e_{n+1} - 2e_n = 0 \rightsquigarrow e_{n+1} = 2e_n$$

$$p(\lambda) = \lambda - 2 \longrightarrow \text{raiz}: \lambda = 2$$

$$\boxed{e_n^{(h)} = \alpha 2^n}$$

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \xrightarrow{\times 2} & \alpha \cdot 2 & \xrightarrow{\times 2} & \alpha \cdot 2^2 & & \alpha 2^n \\ e_0^{(h)} & & e_1^{(h)} & & e_2^{(h)} & \cdots & e_n^{(h)} \end{array}$$

(2) solución particular de la no homogénea

$$e_{n+1} - 2e_n = 2^n$$

$$e_{n+1} - 2e_n = r^n g(n)$$

$\rightsquigarrow$ polinomio en n

$$e_{n+1} - 2e_n = \underbrace{2^n}_{\text{este es } r} \cdot \underbrace{1}_{\text{polinomio de grado 0}}$$

como 2 es raiz simple del polinomio característico vamos a buscar una solución particular de la forma

$$e_n^{(p)} = n 2^n \underbrace{h(n)}_{\text{polinomio de grado 0}}$$

$h(n) = c$

$$e_n^{(p)} = c n 2^n$$

$$e_{n+1}^{(p)} = c(n+1)\,2^{n+1}$$

$$e_{n+1}^{(p)} - 2e_n^{(p)} = 2^n$$

$$\Rightarrow c(n+1)\,2^{n+1} - 2cn\,2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow c(n+1)\,2\cdot\cancel{2^n} - 2cn\,\cancel{2^n} = \cancel{2^n}$$

$$\Rightarrow c(n+1)\,2 - 2cn = 1$$

$$\Rightarrow \cancel{2cn} + 2c - \cancel{2cn} = 1$$

$$\Rightarrow 2c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

entonces $e_n^{(p)} = \frac{1}{2} n\,2^n$

$$\boxed{e_n^{(p)} = n\,2^{n-1}}$$

(3) Sumamos $e_n^{(h)}$ y $e_n^{(p)}$ y buscamos el parametro

$$e_n = e_n^{(h)} + e_n^{(p)} = \alpha 2^n + n\,2^{n-1}$$

$$e_0 = 0 \Rightarrow \alpha 2^0 + 0\cdot 2^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$\boxed{e_n = n\,2^{n-1}}$$

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

$$\begin{cases} c_{n+1} = c_n + n\,2^{n-1} & \text{para todo } n \in \mathbb{N} \\ c_0 = 0 \end{cases}$$

$$c_{n+1} = c_n + n\,2^{n-1} \rightsquigarrow \boxed{c_{n+1} - c_n = n\,2^{n-1}}$$

(1) solución general de la homogénea

$$c_{n+1} - c_n = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda - 1 \rightsquigarrow \text{raiz: } \lambda = 1$$

$$c_n^{(h)} = \alpha\,1^n \qquad \boxed{c_n^{(h)} = \alpha}$$

② Solución particular de la no homogénea

$$c_{n+1} - c_n = n\,2^{n-1} = \underbrace{2^{n-1}\cdot 2}_{2^n}\ \underbrace{\tfrac{1}{2}n}_{\text{polinomio de grado 1}} = \underline{2}^n\ \tfrac{1}{2}n$$

$$c_{n+1} - c_n = r^n\,\underbrace{g(n)}_{\text{polinomio}}$$

como 2 no es raíz del polinomio característico $\quad c_n^{(p)} = 2^n(an+b)$

$$C_2\,a_{n+2} + C_1\,a_{n+1} + C_0\,a_n = \underline{r}^n g(n)$$

① r no es raíz del polinomio característico

$$a_n^{(p)} = r^n\,\underbrace{h(n)}_{\text{polinomio del mismo grado que } g}$$

② r es raíz simple del polinomio característico

$$a_n^{(p)} = n\,r^n\,h(n)$$

③ r es raíz doble

$$a_n^{(p)} = n^2 r^n\,h(n)$$

$$c_{n+1} - c_n = n\,2^{n-1} = \underline{2}^n\ \underbrace{\tfrac{1}{2}n}_{\text{polinomio de grado 1}}$$

buscamos $c_n^{(p)} = 2^n\underbrace{(an+b)}_{\text{polinomio de grado 1 genérico}}$

$$c_n^{(p)} = 2^n(an+b)$$

$$c_{n+1}^{(p)} = 2^{n+1}(a(n+1)+b)$$

$$c_{n+1}^{(p)} - c_n^{(p)} = n\,2^{n-1}$$

$\Rightarrow 2^{n+1}(a(n+1)+b) - 2^n(an+b) = n\,2^{n-1}$

$\Rightarrow \cancel{2^{n-1}}\cdot 2^2(a(n+1)+b) - \cancel{2^{n-1}}\cdot 2(an+b) = n\,\cancel{2^{n-1}}$

$\Rightarrow 4(a(n+1)+b) - 2(an+b) = n$

$\Rightarrow 4(an+a+b) - 2(an+b) = n$

$\Rightarrow 4an + 4a + 4b - 2an - 2b = n$

$$\Rightarrow 2an + 4a + 2b = n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} + 2b = 0 \Rightarrow b = -1$$

entonces $c_n^{(p)} = 2^n \left(\frac{1}{2}n - 1\right)$

(3) Sumamos $c_n^{(h)}$ y $c_n^{(p)}$ y buscamos el parámetro

$$c_n = c_n^{(h)} + c_n^{(p)} = \alpha + 2^n \left(\frac{1}{2}n - 1\right)$$

$$c_0 = 0 \Rightarrow \alpha + 2^0 \left(\frac{1}{2}0 - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

$$\boxed{c_n = 1 + 2^n \left(\frac{1}{2}n - 1\right)}$$

Funciones generatrices

a_n sucesión $\longleftrightarrow$ serie ("polinomio infinito")

$a_0, a_1, a_2, \dots$ $\qquad$ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots a_n x^n + \dots$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ejemplo

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^i b^{n-i}$$

$$f(x) = (x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^n x^i$$

$$= C_0^n + C_1^n x^1 + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n + 0$$

la función $(x+1)^n$ genera la sucesión $\underset{a_0}{C_0^n}, \underset{a_1}{C_1^n}, \underset{a_2}{C_2^n}, \dots$

ejemplo:

vamos a buscar la función generatriz de: $a_n = 1$ para todo n

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots) = 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \dots - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \dots$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

Ejercicio 1

Encontrar las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$ la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

(a) $C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, \ldots$
(b) $C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, \ldots$
(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
(e) $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
(f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
(g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
(h) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$
(i) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$
(j) $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

$$\boxed{1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}}$$

d) $\underset{a_0}{0} \quad \underset{a_1}{0} \quad \underset{a_2}{0} \quad \underset{a_3}{0} \quad \underset{a_4}{1} \quad \underset{a_5}{1} \quad 1 \quad 1 \quad \cdots$

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 1x^5 + \cdots$$
$$= x^4 + x^5 + x^6 + \cdots$$
$$= x^4 \cdot 1 + x^4 \cdot x + x^4 \cdot x^2 + \cdots$$
$$= x^4 (1 + x + x^2 + \cdots)$$
$$= x^4 \cdot \frac{1}{1-x}$$
$$f(x) = \frac{x^4}{1-x}$$

g) función generatriz de: 1 2 4 8 16 32 64 ...

$$f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \cdots$$
$$= 1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \cdots$$
$$= 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + (2x)^4 + \cdots \qquad y = 2x$$
$$= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \cdots$$
$$= \frac{1}{1-y}$$
$$= \frac{1}{1-2x} \qquad\qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

e) función generatriz de: 0 0 0 3 -3 3 -3 ....

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 3x^3 - 3x^4 + 3x^5 + \cdots$$
$$= 3x^3 - 3x^4 + 3x^5 + \cdots$$
$$= 3x^3 (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)$$

$$= 3x^3\left(1 - x + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots\right)$$
$$= 3x^3\left(1 + y + y^2 + y^3 + \dots\right) \quad y = -x$$
$$= 3x^3 \frac{1}{1-y}$$
$$= 3x^3 \frac{1}{1-(-x)}$$
$$= \frac{3x^3}{1+x}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n}$$

Ejercicio 3
Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

b) 1ra — 2da — 3ra — — — .... n-ésima

4 colores, 3 colores, 3colores, ..., 3 colores

$$4 \cdot 3^{n-1}$$

a_n = # de banderas donde dos franjas adyacentes no son del mismo color

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \dots\ \_}_{\text{bandera de } n \text{ franjas}}\ \_$$

a_n — 3 colores

1ra — — — — ... — n-ésima

4, 3, 3