Relaciones de recurrencia lineales homogéneas de orden 1

$$\begin{cases} a_{n+1} = C a_n & , C \in \mathbb{R} \\ a_0 = A & , A \in \mathbb{R} \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{a_n = C^n \cdot A}$$

por ejemplo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4 a_n \\ a_0 = 3 \end{cases} \longrightarrow \boxed{a_n = 4^n \cdot 3}$$

$$\underset{a_0}{\overset{\shortparallel}{3}} \xrightarrow{\times 4} \underset{a_1}{\overset{\shortparallel}{4 \cdot 3}} \xrightarrow{\times 4} \underset{a_2}{\overset{\shortparallel}{4^2 \cdot 3}} \longrightarrow \underset{a_3}{\overset{\shortparallel}{4^3 \cdot 3}} \quad \cdots\cdots \quad \underset{a_n}{\overset{\shortparallel}{4^n \cdot 3}} \quad \cdots\cdots$$

Relación de recurrencia lineal homogénea de orden 2

$$\begin{cases} C_2 a_{n+2} + C_1 a_{n+1} + C_0 a_n = 0 & C_2, C_1, C_0 \in \mathbb{R} \\ a_0, a_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

vamos a buscar soluciones de la forma $a_n = \alpha \lambda^n$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \lambda \neq 0$

$$a_n = \alpha \lambda^n$$
$$a_{n+1} = \alpha \lambda^{n+1}$$
$$a_{n+2} = \alpha \lambda^{n+2}$$

$$C_2 a_{n+2} + C_1 a_{n+1} + C_0 a_n = 0$$

$$C_2 \alpha \lambda^{n+2} + C_1 \alpha \lambda^{n+1} + C_0 \alpha \lambda^n = 0$$

$$C_2 \alpha \lambda^n \lambda^2 + C_1 \alpha \lambda^n \lambda + C_0 \alpha \lambda^n = 0$$

$$\Rightarrow C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda + C_0 = 0$$

$p(\lambda) = C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda + C_0$ es el polinomio característico

1) p tiene dos raíces reales distintas λ_1, λ_2

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

donde α_1 y α_2 son números reales que dependen de las condiciones iniciales

2) P tiene una raiz real doble λ_1

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 n \lambda_1^n$$

donde α_1 y α_2 son reales que dependen de las condiciones iniciales

Ejercicio 1

Expresar explícitamente en n las sucesiones:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $b_0 = 5, b_1 = 12$.

a) $\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$

$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \rightsquigarrow \boxed{a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0}$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$\Delta = 25 - 24 = 1 \to \lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2$, $\quad \lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n$

$a_0 = 1 \Rightarrow \alpha_1 2^0 + \alpha_2 3^0 = 1 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (1)

$a_1 = 3 \Rightarrow \alpha_1 2^1 + \alpha_2 3^1 = 3 \Rightarrow 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 3$ (2)

(2) − 2(1) : $\alpha_2 = 1$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$

Entonces : $\boxed{a_n = 3^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}}$

b) $\begin{cases} b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0 \\ b_0 = 5 \\ b_1 = 12 \end{cases}$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$

$\Delta = 36 - 36 = 0$

raíz doble $\lambda_1 = 3$

$b_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$

$b_0 = 5 \Rightarrow \alpha_1 \overbrace{3^0}^{1} + \overbrace{\alpha_2 0 \cdot 3^0}^{0} = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 5$

$b_1 = 12 \Rightarrow 5 \cdot 3^1 + \alpha_2 3^1 = 12 \Rightarrow 15 + 3\alpha_2 = 12 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{12-15}{3} = -1$

entonces $\boxed{b_n = 5 \cdot 3^n - n 3^n}$

Relación de recurrencia lineal de orden 2 no homogénea

$$\begin{cases} c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n) \\ a_0, a_1 \end{cases} \qquad c_2, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$$

1. buscar la solución general de la relación de recurrencia homogénea

$$c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

$\rightarrow a_n^{(h)}$ que depende de parámetros

2. buscar una solución particular de la relación no homogénea

$$c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$$

$\rightarrow a_n^{(p)}$

3. sumamos $a_n^{(h)}$ y $a_n^{(p)}$ y buscamos los parámetros

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

Búsqueda de la solución particular

Vamos a considerar

$$c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = r^n g(n)$$

$r \in \mathbb{R}$

polinomio en n

1. si r no es raíz del polinomio característico vamos a buscar una solución particular de la forma

$a_n^{(p)} = r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

(2) Si r es raíz simple del polinomio característico vamos a buscar una solución particular de la forma

$a_n^{(p)} = n r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

(3) Si r es raíz doble del polinomio característico

$a_n^{(p)} = n^2 r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

Ejercicio 5
Expresar explícitamente en n las sucesiones:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

b) $\begin{cases} d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1 \\ d_0 = 0 \\ d_{100} = 0 \end{cases}$

$d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1 \rightsquigarrow \frac{1}{2}d_{n+1} - d_n + \frac{1}{2}d_{n-1} = -1$

(1) buscamos la solución general de la homogénea

$$\frac{1}{2}d_{n+1} - d_n + \frac{1}{2}d_{n-1} = 0$$

$$p(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ raíz doble}$$

$$d_n^{(h)} = \alpha_1 1^n + \alpha_2 n 1^n$$

$$\boxed{d_n^{(h)} = \alpha_1 + \alpha_2 n}$$

(2) buscamos una solución particular de la no homogénea

$$\frac{1}{2}d_{n+1} - d_n + \frac{1}{2}d_{n-1} = -1 = 1^n\,(-1)$$ polinomio de grado 0

$$\frac{1}{2}d_{n+1} - d_n + \frac{1}{2}d_{n-1} = 1^n\,\overbrace{(-1)}^{g(n)}$$ polinomio de grado 0

1: raiz doble del polinomio caracteristico

vamos a buscar una solución particular de la forma

$$d_n^{(p)} = n^2\,1^n\,\underbrace{h(n)}$$

n^2: porque 1 es raiz doble del polinomio caracteristico

$h(n)$: polinomio del mismo grado que g

$\Rightarrow$ h tiene grado 0

$\Rightarrow h(n) = c \quad , c \in \mathbb{R}$

$$d_n^{(p)} = cn^2$$

$$d_{n+1}^{(p)} = c(n+1)^2 = c(n^2+2n+1) = cn^2 + 2cn + c$$

$$d_{n-1}^{(p)} = c(n-1)^2 = c(n^2-2n+1) = cn^2 - 2cn + c$$

$$\frac{1}{2}d_{n+1}^{(p)} - d_n^{(p)} + \frac{1}{2}d_{n-1}^{(p)} = -1$$

$$\frac{1}{2}(cn^2+2cn+c) - cn^2 + \frac{1}{2}(cn^2-2cn+c) = -1$$

$$\cancel{\frac{1}{2}cn^2} + \cancel{cn} + \frac{1}{2}c - \cancel{cn^2} + \cancel{\frac{1}{2}cn^2} - \cancel{cn} + \frac{1}{2}c = -1$$

$$c = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{d_n^{(p)} = -n^2}$$

(3) sumamos $d_n^{(h)}$ y $d_n^{(p)}$ y buscamos los parámetros

$$d_n = d_n^{(h)} + d_n^{(p)}$$

$$d_n = \alpha_1 + \alpha_2 n - n^2$$

$d_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 - 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

$d_{100} = 0 \Rightarrow \alpha_2 \cdot 100 - (100)^2 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_2 - 100 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 100$

Entonces: $d_n = 100n - n^2$

Ejercicio 2

(e) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

a_n = número de secuencias de 1's y 2's que suman n

$a_1 = 1$
$\hookrightarrow (1)$

$a_2 = 2$
$\hookrightarrow (11), (2)$

$a_3 = 3$
$\hookrightarrow (111), (21), (12)$

$a_n = \,?$

CASO 1: secuencias que suman n y terminan en 1

cualquier secuencia de 1's y 2's que sume $n-1$ $\rightarrow$

$$\underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}^{\text{suma } n-1}\ \ \underline{1}}_{\text{suma } n}$$

$\longrightarrow a_{n-1}$ secuencias

CASO 2: secuencias que suman n y terminan en 2

cualquier secuencia de 1's y 2's que sume $n-2$ $\rightarrow$

$$\underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}^{\text{suman } n-2}\ \ \underline{2}}_{\text{suma } n} \qquad \underline{2}\ \overbrace{\_\ \cdots\ \_}$$

$\longrightarrow a_{n-2}$ secuencias

Por regla de la suma: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$