

Prachio 4

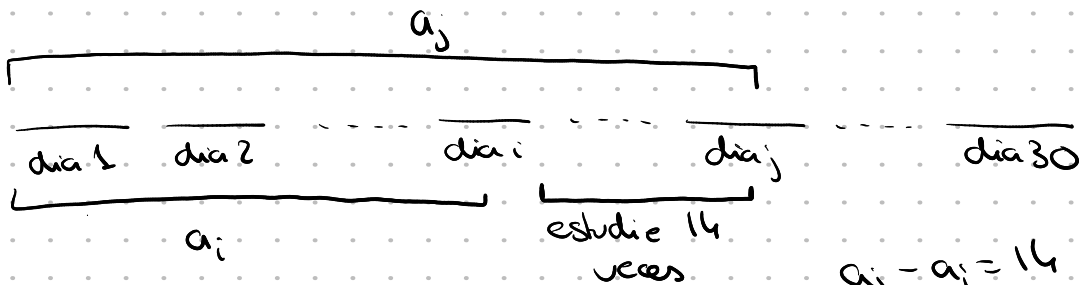
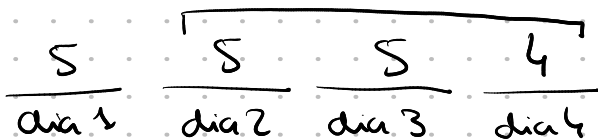
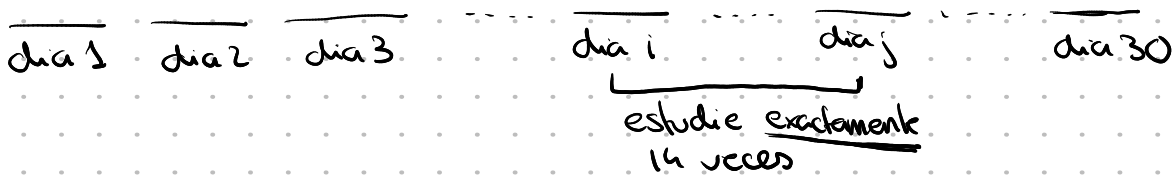
Ejercicio 9

Se sabe que Judit Polgár estudió ajedrez al menos una vez por día durante 30 días consecutivos, y en esos 30 días estudió exactamente 45 veces en total. Demostrar que existe un conjunto de días consecutivos en los que Judit Polgár entrenó en total exactamente 14 veces.

$$\begin{array}{ccc} \underline{1 \leq} & \underline{1 \leq} & \underline{1 \leq} \\ \text{día 1} & \text{día 2} & \text{día 3} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{cc} \underline{1 \leq} & \underline{1 \leq} \\ \text{día 29} & \text{día 30} \end{array}$$

en los 30 días estudió un total de 45 veces

buscamos un conjunto de días consecutivos en los que estudió exactamente 14 veces



$$\begin{aligned} a_j - a_i &= 14 \\ a_j &= a_i + \underline{14} \end{aligned}$$

a_1 = cantidad de veces que estudió el día 1

a_2 = cantidad de veces que estudió el día 1 + cantidad de veces que estudió el día 2

a_3 = cantidad de veces que estudió hasta el día 3 incluido

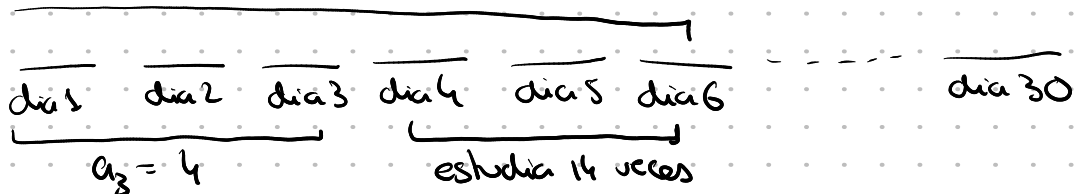
a_i = cantidad de veces que estudió hasta el día i incluido

a_{30} = cantidad de veces que estudió hasta el día 30

$$a_{30} = 45$$

Si encontramos i y j tales $a_j - a_i = 14$

$$a_6 = 18$$



$$a_6 - a_3 = 18 - 4 = 14$$

$$a_6 - a_3 = 14$$

\Rightarrow entre el día 4 (incluido) y el día 6 (incluido) estudia 14 veces

Buscamos i, j tales $a_j - a_i = 14$

$$a_j = a_i + 14$$

$$a_2 = a_1 + \underbrace{\# \text{ veces que estudio el día } i}_{\geq 1}$$

$$a_2 > a_1$$

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \dots < a_{30} = 45$$

$$a_3 = a_2 + \underbrace{\# \text{ veces que estudio el día } i}_{\geq 1}$$

$$15 \leq a_1 + 14 < a_2 + 14 < a_3 + 14 < \dots < a_{30} + 14 = 59 \quad a_3 > a_2$$

60 elementos

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \dots, a_{30} + 14$ toman valores entre 1 y 59

distintos entre si

distintos entre si

59 posibles valores

Como tenemos 59 valores posibles para 60 elementos hay dos que valen lo mismo

entonces existen i, j tales que $a_j = a_i + 14$

\Rightarrow entre el día $i+1$ y el día j (incluidos) estudio exactamente 14 veces

Practico 5

- resolver una recurrencia
- establecer una recurrencia a partir de un problema de conteo

Ejercicio 2

Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leq n-1$) siendo a_n :

- (a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

a_n = cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 3 = 1 + 2 = a_2 + 2$$

↑
Saludos que ocurrieron antes de que llegara la 3^{ra} persona

↑
la tercera persona saluda a los dos que ya estaban

$$a_n = ?$$

→ ya ocurrieron a_{n-1} saludos

→ la persona número n saluda a los que ya estaban: $n-1$ saludos

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

$$= a_{n-2} + (n-2) + (n-1)$$

$$= a_{n-3} + (n-3) + (n-2) + (n-1)$$

$$= \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= \frac{(n-1)n}{2}$$

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

a_n = cantidad de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos

$$a_1 = 2$$

↳ (1) (0)

$$a_2 = 3$$

↳ (0,1) (1,0), (1,1) (0,0) X

$$a_n = ?$$

CASO 1: secuencias de largo n de ceros y unos que no tengan 2 ceros consecutivos y que terminen en 1.

1 2 3 4 ... n-1 1
n

Cualquier secuencia de largo $n-1$ de 0's y 1's que no tenga 2 ceros consecutivos

→ a_{n-1} secuencias

CASO 2: secuencias de largo n de 0's y 1's que no tienen dos 0's consecutivos y terminan en 0

1 2 3 ... n-2 1 0
n-1 n

Cualquier secuencia de largo $n-2$ que no tenga 2 ceros consecutivos

→ a_{n-2} secuencias

entonces por la regla de la suma

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{sucesión de Fibonacci}$$

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, \dots$$

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

a_n = número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas

$$a_1 = 3$$

↳ (A), (B), (C)

$$a_2 = 8$$

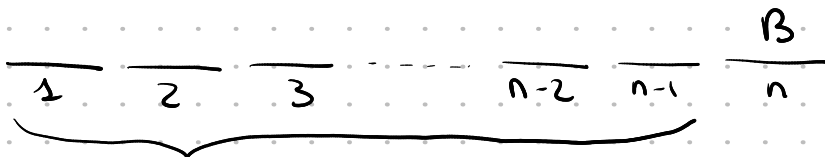
↳ (A,B), (A,C)

(B,A), (B,B), (B,C)

(C,A), (C,B), (C,C)

$$a_n = ?$$

CASO 1: secuencias que terminan en B



cualquier secuencia de largo $n-1$
que no tenga dos A consecutivas

→ a_{n-1} secuencias

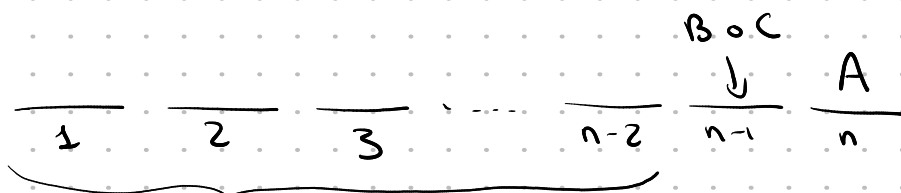
CASO 2: secuencias que terminan en C



cualquier secuencia de largo $n-1$
que no tenga dos A consecutivas

→ a_{n-1} secuencias

CASO 3: secuencias que terminan en A



cualquier secuencia de largo $n-2$

que no tenga dos A consecutivas

→ $2a_{n-2}$ secuencias

por la regla de la suma: $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + 2a_{n-2}$

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}}$$