Practica 4

Ejercicio 9

Se sabe que Judit Polgár estudió ajedrez al menos una vez por día durante 30 días consecutivos, y en esos 30 días estudió exactamente 45 veces en total. Demostrar que existe un conjunto de días consecutivos en los que Judit Polgár entrenó en total exactamente 14 veces.

$1 \leq$ dia 1 $\quad 1 \leq$ dia 2 $\quad 1 \leq$ dia 3 ...... $1 \leq$ dia 29 $\quad 1 \leq$ dia 30

en los 30 dias estudia un total de 45 veces

buscamos un conjunto de dias consecutivos en los que estudio exactamente 14 veces

dia 1 $\quad$ dia 2 $\quad$ dia 3 .... dia i .... dia j .... dia 30

estudie exactamente 14 veces

5 (dia 1) $\quad$ 5 (dia 2) $\quad$ 5 (dia 3) $\quad$ 4 (dia 4)

a_j

dia 1 $\quad$ dia 2 .... dia i .... dia j .... dia 30

a_i $\qquad$ estudie 14 veces

$a_j - a_i = 14$

$a_j = a_i + \underline{14}$

a_1 = cantidad de veces que estudio el dia 1

a_2 = cantidad de veces que estudio el dia 1 + <u>cantidad de veces que estudio el dia 2</u>

a_3 = cantidad de veces que estudio hasta el dia 3 incluido

a_i = cantidad de veces que estudio hasta el dia i incluido

a_{30} = cantidad de veces que estudio hasta el dia 30

$a_{30} = 45$

si encontramos i y j tales $a_j - a_i = 14$

$$\overbrace{\underbrace{\overline{\text{dia 1}}\quad \overline{\text{dia 2}}\quad \overline{\text{dia 3}}}_{a_3 = 4}\quad \underbrace{\overline{\text{dia 4}}\quad \overline{\text{dia 5}}\quad \overline{\text{dia 6}}}_{\text{estudia 14 veces}}}^{a_6 = 18} \quad - - - - \quad \overline{\text{dia 30}}$$

$a_6 - a_3 = 18 - 4 = 14$

$a_6 - a_3 = 14$ $\Rightarrow$ entre el dia 4 (incluido) y el dia 6 (incluido) estudia 14 veces

Buscamos i, j tales $a_j - a_i = 14$

$a_j = \underbrace{a_i + 14}$

$a_2 = a_1 + \underbrace{\#\text{veces que estudio el dia 2}}_{\geq 1}$

$a_2 > a_1$

$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \cdots < a_{30} = 45$

$a_3 = a_2 + \underbrace{\#\text{ veces que estudio el dia 3}}_{\geq 1}$

$15 \leq a_1 + 14 < a_2 + 14 < a_3 + 14 < \cdots < a_{30} + 14 = 59$ $\quad a_3 > a_2$

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{30}}_{\text{distintos entre si}}, \underbrace{a_1 + 14, a_2 + 14, \cdots, a_{30} + 14}_{\text{distintos entre si}}}^{60 \text{ elementos}} \ \underbrace{\text{toman valores entre 1 y 59}}_{59 \text{ posibles valores}}$$

Como tenemos 59 valores posibles para 60 elementos hay dos que valen lo mismo

entonces existen i y j tales que $a_j = a_i + 14$

$\Rightarrow$ entre el dia $i+1$ y el dia j (incluidos) estudio exactamente 14 veces

Practico 5

- resolver una recurrencia
- establecer una recurrencia a partir de un problema de conteo

Ejercicio 2

Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

a_n = cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunion

$a_0 = 0$

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 3 = 1 + 2 = a_2 + 2$

saludos que ocurrieron antes de que llegara la 3ra persona

la tercera persona saluda a los dos que ya estaban

$a_n = ?$

→ ya ocurrieron a_{n-1} saludos

→ la persona numero n saluda a los que ya estaban: n-1 saludos

$a_n = a_{n-1} + (n-1)$

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + (n-1) \\
&= a_{n-2} + (n-2) + (n-1) \\
&= a_{n-3} + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\
&= \dots \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= \frac{(n-1)n}{2}
\end{aligned}
$$

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

a_n = cantidad de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos

$a_1 = 2$

$\to$ (1) (0)

$a_2 = 3$

$\to$ (0,1) (1,0), (1,1), $\boxed{(0,0)}$ X

$a_n = ?$

CASO 1: secuencias de largo n de ceros y unos que no tengan 2 ceros consecutivos y que terminen en 1

$$\underbrace{\underset{1}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \cdots\ \underset{n-1}{\_\_}}_{}\ \underset{n}{\underline{1}}$$

cualquier secuencia de largo n-1 de 0's y 1's que no tenga 2 ceros consecutivos

$\longrightarrow a_{n-1}$ secuencias

CASO 2: secuencias de largo n de 0's y 1's que no tienen dos 0's consecutivos y terminan en 0

$$\underbrace{\underset{1}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \cdots\ \underset{n-2}{\_\_}}_{}\ \underset{n-1}{\underline{1}}\ \underset{n}{\underline{0}}$$

cualquier secuencia de largo n-2 que no tenga 2 ceros consecutivos

$\longrightarrow a_{n-2}$ secuencias

entonces por la regla de la suma

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{sucesión de Fibonacci}$$

$a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, ...

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

a_n = numero de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas

$a_1 = 3$
$\to$ (A), (B), (C)

$a_2 = 8$
$\to$ (A,B), (A,C)
(B,A), (B,B), (B,C)
(C,A), (C,B), (C,C)

$a_n = ?$

<u>CASO 1</u>: secuencias que terminan en B

$$\underbrace{\underset{1}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \cdots\ \underset{n-2}{\_\_}\ \underset{n-1}{\_\_}}_{\text{cualquier secuencia de largo } n-1 \text{ que no tenga dos A consecutivas}}\ \underset{n}{\overset{B}{\_\_}}$$

$\longrightarrow a_{n-1}$ secuencias

<u>CASO 2</u>: secuencias que terminan en C

$$\underbrace{\underset{1}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \cdots\ \underset{n-2}{\_\_}\ \underset{n-1}{\_\_}}_{\text{cualquier secuencia de largo } n-1 \text{ que no tenga dos A consecutivas}}\ \underset{n}{\overset{C}{\_\_}}$$

$\longrightarrow a_{n-1}$ secuencias

<u>CASO 3</u>: secuencias que terminan en A

$$\underbrace{\underset{1}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \cdots\ \underset{n-2}{\_\_}}_{\text{cualquier secuencia de largo } n-2}\ \underset{n-1}{\overset{B \text{ o } C}{\_\_}}\ \underset{n}{\overset{A}{\_\_}}$$

que no tenga dos A consecutivas

$\longrightarrow 2a_{n-2}$ secuencias

por la regla de la suma: $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + 2a_{n-2}$

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}}$$