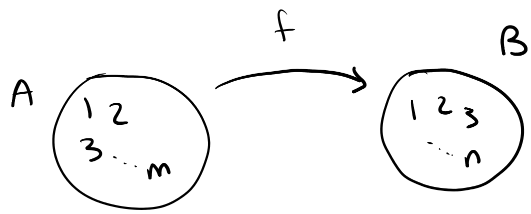
PRACTICO 4

Principio del palomar

tenemos m palomas y n nidos

si $m > n$ y cada paloma va algún nido entonces hay al menos un nido con 2 palomas o más.



si $m > n$ entonces f no puede ser inyectiva

Ejercicio 1
Probar que entre 100000 personas hay al menos dos que nacieron al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

las palomas son las 100 000 personas

los nidos son las distintas posibilidades para los tiempos de nacimiento

$\rightarrow$ hay $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ nidos

Como hay mas palomas que nidos, por el principio del palomar hay al menos dos personas que nacieron al mismo tiempo

Ejercicio 2
Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

queremos ver que si A es un subconjunto de S con 6 elementos entonces hay 2 elementos de A cuya suma da 10

$$\left.\begin{array}{l} 1+9=10 \\ 2+8=10 \\ 3+7=10 \\ 4+6=10 \end{array}\right\}$$

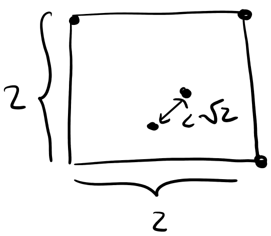
las palomas son los seis elementos de A

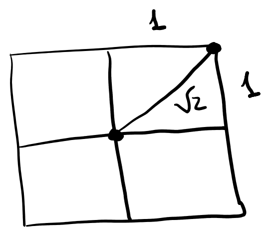
los nidos son los conjuntos

$\{1,9\}$, $\{2,8\}$, $\{3,7\}$, $\{4,6\}$, $\{5\}$

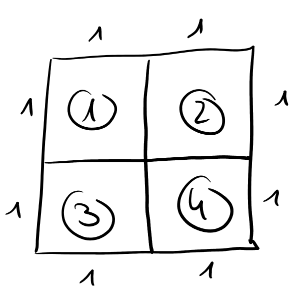
Como hay más palomas que nidos, uno de los cinco nidos tiene dos elementos del conjunto A y esos dos elementos suman 10.

Ejercicio 4
Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que hay al menos dos puntos cuya distancia es menor o igual que $\sqrt{2}$.





las palomas son los cinco punto que elegimos en el cuadrado
para definir los nidos buscamos dividir el cuadrado 2×2 en cuatro regiones de modo que en cada región la mayor distancia entre dos puntos sea $\leq \sqrt{2}$



los nidos son las regiones 1, 2, 3, 4
Como tenemos más palomas que nidos, hay dos puntos en la misma región es decir dos puntos cuya distancia es $\leq \sqrt{2}$

n personas en la reunión

Ejercicio 3

Probar que en una reunión cualquiera con dos o más personas siempre existen al menos dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en esa reunión.

posibilidades para las cantidades de amigos:

$0, 1, 2, \ldots, n-2,$

(1) todas las personas tienen por lo menos un amigo en la reunión

las palomas son las n personas

los nidos son las cantidades posibles de amigos de una persona

nidos: $1, 2, 3, \ldots, n-1$

$\Rightarrow$ hay $n-1$ nidos

por palomar, como hay más palomas que nidos, hay dos personas con la misma cantidad de amigos.

(2) hay personas que no tienen ningún amigo

K = cantidad de personas que no tienen ningún amigo en la reunión

hay $n-k$ personas con por lo menos un amigo

las palomas son las $n-k$ personas con por lo menos un amigo

los nidos son las cantidades posibles de amigos de las $n-k$ personas

nidos: $1, 2, \ldots, n-k-1$

$\Rightarrow$ hay $n-k-1$ nidos

por palomar, hay dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en la reunión

$\lceil x \rceil \to$ redondeado para arriba

Ejercicio 5

Dado un número real x, denotamos mediante $\lceil x \rceil$ al menor entero y tal que $y \geq x$. Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| / |B| \rceil$ elementos de A que toman el mismo valor.

$\left.\begin{array}{l} f: A \to B \\ |A| > |B| \end{array}\right\}$ por palomar, f no es inyectiva

$\to$ existen dos elementos de A que tienen la misma imágen

$\to$ existe un elemento de B que tiene por lo menos dos preimágenes

$$f: \overbrace{\{1,2,3,4,5,6\}}^{A} \to \overbrace{\{1,2\}}^{B}$$

$f(1) = 1 \qquad f(2) = 2$

$f(3) = 1 \qquad f(4) = 2$

puede ser que 1 tenga 2 preimágenes y 2 tenga dos preimágenes?

tiene que haber un elemento de $\{1,2\}$ que tiene por lo menos 3 preimágenes $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil = 3$

vamos a probar que:

Si $f: \underbrace{\{1,2,3,4,5,6\}}_{A} \to \underbrace{\{1,2\}}_{B}$ entonces hay un elemento de B que tiene por lo menos $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil = 3$ preimágenes.

Supongamos por absurdo que todos los elementos de B tienen a lo sumo 2 preimágenes.

$A = \{\text{preimágenes de } 1\} \cup \{\text{preimágenes de } 2\}$

$|A| = \underbrace{\#\text{preimágenes de } 1}_{\leq 2} + \underbrace{\#\text{preimágenes de } 2}_{\leq 2} \leq 4$ pero $|A| = 6$

absurdo!

En general

queremos ver que si $f: A \to B$ con $|A| > |B|$ entonces existe un elemento de B que tiene por lo menos $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$ preimágenes

Supongamos por absurdo que todos los elementos de B tienen a lo sumo $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1$ preimágenes

$$B = \{ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{|B|} \}$$

$$A = \{\text{preimágenes de } b_1\} \cup \{\text{preimágenes de } b_2\} \cup \ldots \cup \{\text{preimágenes de } b_{|B|}\}$$

$$|A| = \underbrace{\#\text{preimágenes de } b_1}_{\leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1} + \underbrace{\#\text{preimágenes de } b_2}_{\leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1} + \ldots + \underbrace{\#\text{preimágenes de } b_{|B|}}_{\leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1}$$

$$\leq |B| \left(\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 \right)$$

$$\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 < \frac{|A|}{|B|} \;?$$

$$\underbrace{\underbrace{\lceil 1{,}5 \rceil}_{=2} - 1}_{1} < 1{,}5$$

$$|A| \leq |B| \left(\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 \right)$$

$$\frac{|A|}{|B|} \leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 \quad \text{absurdo!}$$

$$|A| \leq |B| \left(\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 \right)$$

$$< \cancel{|B|} \frac{|A|}{\cancel{|B|}}$$

$$|A| < |A| \quad \text{absurdo!}$$