PRACTICO 1

Inducción completa

* la inducción completa es un método para demostrar propiedades sobre los numeros naturales
* cuál es la idea?

Sea $P(n)$ una propiedad sobre un número natural n

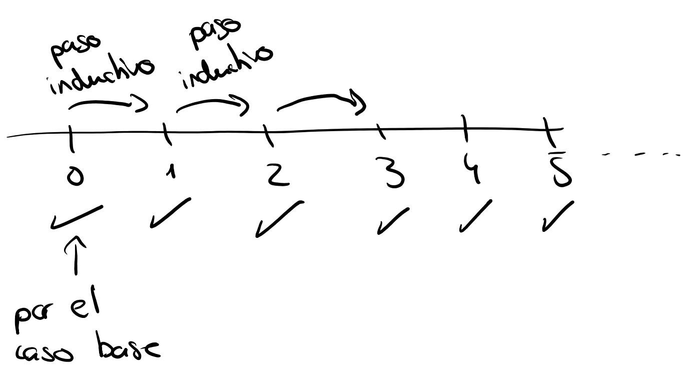
por ejemplo: en el ejercicio 2

$P(n)$: $7^n - 2^n$ es multiplo de 5

→ una demostración de que $P(n)$ se cumple para todo natural n por inducción completa tiene dos etapas

1. casa base:
   probamos que la propiedad se cumple para $n=0$

2. paso inductivo:
   - Hipótesis inductiva: suponemos que la propiedad se cumple para un natural genérico k
   - Tesis inductiva: demostramos que la propiedad se cumple para $k+1$



Ejercicio 1
Probar de dos formas distintas que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n.

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{5} i = 0+1+2+3+4+5$$

$$\sum_{i=0}^{4} i^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+3+\ldots+n$$

Sea $P(n)$: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Vamos a probar que $P(n)$ se cumple para todo natural por inducción completa

1) Caso base: probamos que la propiedad se cumple para $n=0$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{0} i = 0 \\ \frac{0(0+1)}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2} \quad \checkmark$$

2) Paso inductivo: suponemos que la propiedad vale para k y probamos que vale para $k+1$

* Hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

* queremos probar que $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \underbrace{0+1+2+\ldots+k}_{\sum_{i=0}^{k} i} + k+1$$

$$= \sum_{i=0}^{k} i + (k+1)$$

por hipótesis inductiva

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$\alpha = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$
$$\alpha = 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 1 + 0$$

$$2\alpha = 100 + 100 + 100 + 100 + \cdots + 100 + 100$$
$$= 100 \cdot 101$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

Ejercicio 4

Probar que para todo natural a existe un natural k tal que $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9k$.

Sea $P(a)$: $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9k$ para algún k

Vamos a probar que $P(a)$ se cumple para todo natural por inducción completa

Caso base: probamos que se cumple para $a=0$

$$0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 0 + 1 + 8 = 9 = 9 \cdot k \text{ con } k=1$$

Paso inductivo: suponemos que la propiedad vale para un natural b y probamos que vale para b+1

* Hipótesis inductiva:

$$b^3 + (b+1)^3 + (b+2)^3 = 9k \text{ para algún } k$$

* queremos probar que la propiedad se cumple para b+1

$$(b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)^3 = 9k' \text{ para algún } k'$$

$$\begin{aligned}
(b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)^3 &= (b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)(b+3)^2 \\
&= (b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)(b^2+6b+9) \\
&= (b+1)^3 + (b+2)^3 + b^3 + 6b^2 + 9b + 3b^2 + 18b + 27 \\
&= b^3 + (b+1)^3 + (b+2)^3 + 9b^2 + \underset{9\cdot 3b}{\underset{\shortparallel}{27b}} + \underset{9\cdot 3}{\underset{\shortparallel}{27}} \\
&= 9k + 9(b^2+3b+3) \\
&= 9(k + (b^2+3b+3)) \\
&= 9(\underbrace{k + b^2 + 3b + 3}_{k'}) \\
&= 9k'
\end{aligned}$$

por hipótesis inductiva

Ejercicio 2

Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Sea $P(n)$: $7^n - 2^n$ es multiplo de 5

Caso base: probamos que vale para $n=0$

$7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ es multiplo de 5 ✓

Paso inductivo: suponemos que vale para un natural k y probamos que vale para k+1

* hipótesis inductiva:

* <u>hipótesis inductiva</u>:

$7^k - 2^k$ es multiplo de 5

es decir $7^k - 2^k = 5q$ para algún q natural

* queremos probar que

$7^{k+1} - 2^{k+1}$ es multiplo de 5

es decir $7^{k+1} - 2^{k+1} = 5q'$ para algún q' natural

$$
\begin{aligned}
7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \\
&= (5+2) \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \\
&= 5 \cdot 7^k + \underset{\smile}{2} \cdot 7^k - \underset{\smile}{2} \cdot 2^k \\
&= 5 \cdot 7^k + 2(7^k - 2^k)
\end{aligned}
$$

por hipótesis inductiva: $7^k - 2^k$ es multiplo de 5

entonces $2(7^k - 2^k)$ es multiplo de 5

además $5 \cdot 7^k$ es multiplo de 5

luego $7^{k+1} - 2^{k+1}$ es multiplo de 5 porque es suma de dos multiplos de 5 ✓

Otra forma de concluir

$$
\begin{aligned}
7^{k+1} - 2^{k+1} &= \dots \\
&= \dots \\
&= 5 \cdot 7^k + 2(7^k - 2^k) \quad \text{por hipótesis inductiva} \\
&= \overset{\frown}{5} \cdot 7^k + 2 \cdot \overset{\frown}{5q} \\
&= 5(\underbrace{7^k + 2q}_{q'}) \\
&= 5q' \ ✓
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3
Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

$n=0: \quad 2^0 = 1 \quad , 0^2 = 0$ ✓

$n=1: \quad 2^1 = 2 \quad , 1^2 = 1$ ✓

$n=2: \quad 2^2 = 4 \quad , 2^2 = 4$ ✓

$n=3: \quad 2^3 = 8 \quad , 3^2 = 9$ X

$n=4: \quad 2^4 = 16 \quad , 4^2 = 16$ ✓ $\leftarrow$

$n=5: \quad 2^5 = 32 \quad , 5^2 = 25$ ✓

Consideramos $n_0 = 4$

Sea $P(n): 2^n \geq n^2$

Vamos a probar por inducción completa que $P(n)$ se cumple para todo natural ≥ 4

Caso base: probamos que la propiedad se cumple para $n=4$

$$\left.\begin{aligned} 2^4 &= 16 \\ 4^2 &= 16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2^4 \geq 4^2 \checkmark$$

Paso inductivo: suponemos que se cumple para k y probamos que se cumple para $k+1$

* Hipótesis inductiva: $2^k \geq k^2$ con $k \geq 4$

* queremos probar que: $2^{k+1} \geq (k+1)^2$

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{\uparrow}{\geq} 2 \cdot k^2 \overset{?}{\geq} (k+1)^2$$

hipótesis inductiva

Para concluir queremos ver que $2 \cdot k^2 \geq (k+1)^2$ si $k \geq 4$

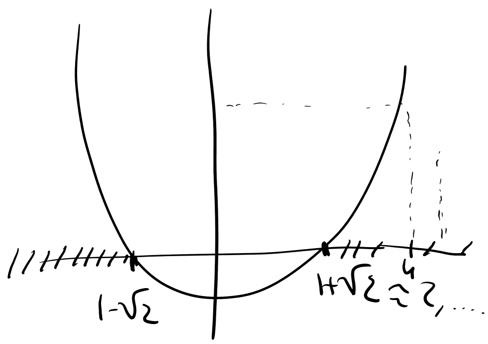
Para concluir queremos ver que $2\cdot k^2 \geq (k+1)^2$

$$2\cdot k^2 \geq (k+1)^2 \iff 2k^2 - (k+1)^2 \geq 0$$
$$\iff 2k^2 - (k^2+2k+1) \geq 0$$
$$\iff \underline{k^2 - 2k - 1 \geq 0}$$

$k^2 - 2k - 1 = 0$

$\Delta = 8 \longrightarrow k_1 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{4\cdot 2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2^2\cdot 2}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\cancel{2}(1+\sqrt{2})}{\cancel{2}}$

$\searrow k_2 = 1 - \sqrt{2}$



si $k \geq 4$ entonces $k^2 - 2k - 1 \geq 0$

entonces $2k^2 \geq (k+1)^2$

y por lo tanto $2^{k+1} \geq (k+1)^2$