4. Considere $\mathbb{R}^4$ y los subespacios $\boxed{x+y+z+t=0} \to$ hiperplano $\dim=3$

$$T = [\underbrace{(0,0,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,2,2,1)}_{v_2}] \text{ y } S = [\underbrace{(1,1,0,1)}_{v_3}, \underbrace{(2,3,1,1)}_{v_4}].$$

Entonces:

A) $S \oplus T = \mathbb{R}^4$.

B) $dim(S+T) = 2$.

C) $dim(S+T) = 3$.

$$\underbrace{\dim(S+T)}_{2} = \underbrace{\dim(S)}_{2} + \underbrace{\dim(T)}_{2} - \dim(S\cap T)$$

$$T = \{v_T\} = \{(\beta, 2\beta, \alpha+2\beta, \alpha+\beta)\}$$

$$S = \{v_S\} = \{(\gamma+2\delta, \gamma+3\delta, \delta, \gamma+\delta)\}$$

$$v_T + v_S = \underbrace{(\alpha v_1 + \beta v_2)}_{v_T} + \underbrace{(\gamma v_3 + \delta v_4)}_{v_S}$$

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & t \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 2 & z \\ 0 & 1 & x \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2F_4-F_2]{F_3-F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & t \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & z-t \\ 0 & 0 & \boxed{2x-y} = 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2F_3-F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & t \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & \boxed{2z-2t-y} = 0 \\ 0 & 0 & 2x-y \end{array}\right]$$

$$T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x-y=0 \ , \ 2z-2t-y=0\}$$

$$T: \begin{cases} 2x-y=0 \\ 2z-2t-y=0 \end{cases} \longmapsto \text{Ec. implícita}$$

S:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow[F_4-F_2]{F_2-F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -2 & t-y \end{array}\right] \xrightarrow[F_4+2F_2]{F_3-F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & \boxed{z-y+x} = 0 \\ 0 & 0 & \boxed{t-y+2y-2x} = 0 \end{array}\right]$$

$$S: \begin{cases} z-y+x=0 \\ t+y-2x=0 \end{cases}$$

$S \cap T$:

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2z-2t-y=0 \\ z-y+x=0 \\ t+y-2x=0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4+F_1]{2F_3-F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$t+y-2x=0$ $\quad \left[\begin{array}{cccc|c} \cdots & & & & \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4+F_1]{2F_3-F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{F_2-F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ F_4-F_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{array}\right] \Rightarrow rg = 3$$

$\Rightarrow$ 3 columnas L.I.

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim(S+T)=3}$

ORANGEL ALCANTARA ZABALA to Everyone 20:36

Prof tengo una duda respecto a un ejercicio

Lo que empece fue por escribir los vectores de la base canonica de R^4 como Combinacion Lineal de la misma usando como escalares los elementos de la matriz asociada.

Y luego teniendo esos valores, tenia la expresion de T, pero no supe como continuar

Martin to Everyone 20:37

${}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} \rightarrow$ ¿T?

canónica

$$\Rightarrow \underbrace{T(x,y,z)}_{\text{coord}_{\mathcal{C}}(T(x,y,z))} = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{coord}_{\mathcal{C}}(x,y,z)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C}$ es:

$$_{\mathcal{C}}(T_\alpha)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 1 & \alpha+3 & 4 & -2\alpha \\ -2 & -2 & \alpha-4 & 3 \\ -2 & \alpha & -2 & \alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

a) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

b) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

c) T_α es sobreyectiva para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Si T_α no es sobreyectiva entonces hay valores de α para los que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ y otros valores para los $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$

7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C}$ es:

$$_{\mathcal{C}}(T_\alpha)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 1 & \alpha+3 & 4 & -2\alpha \\ -2 & -2 & \alpha-4 & 3 \\ -2 & \alpha & -2 & \alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

a) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

b) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

c) T_α es sobreyectiva para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Si T_α no es sobreyectiva entonces hay valores de α para los que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ y otros valores para los $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

e) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.

Si T no es sobreyectiva $\Rightarrow \mathrm{Im} \subseteq \mathbb{R}^4$ con $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \mathbb{R}^4$

$\Downarrow$

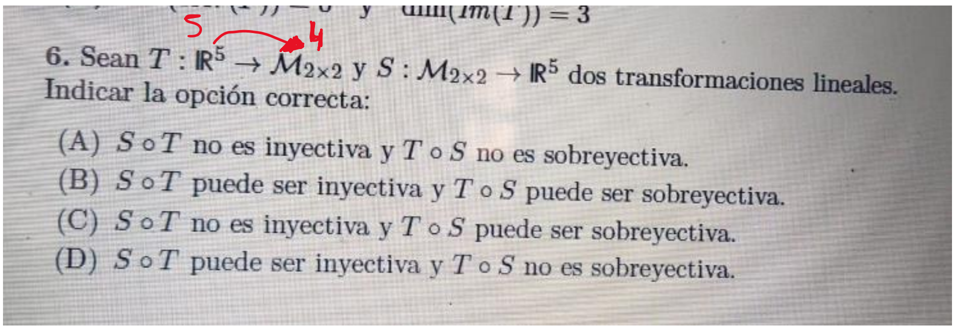
Lo averiguo con el $rg({}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}})$

$\parallel$

$\dim(\mathrm{Im}(T))$

$W = \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$

(sobreyectiva)



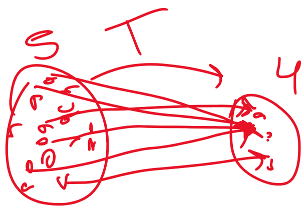
6. Sean $T : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ y $S : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^5$ dos transformaciones lineales. Indicar la opción correcta:

(A) $S \circ T$ no es inyectiva y $T \circ S$ no es sobreyectiva.

(B) $S \circ T$ puede ser inyectiva y $T \circ S$ puede ser sobreyectiva.

(C) $S \circ T$ no es inyectiva y $T \circ S$ puede ser sobreyectiva.

(D) $S \circ T$ puede ser inyectiva y $T \circ S$ no es sobreyectiva.



$\Rightarrow T$ no es inyectiva

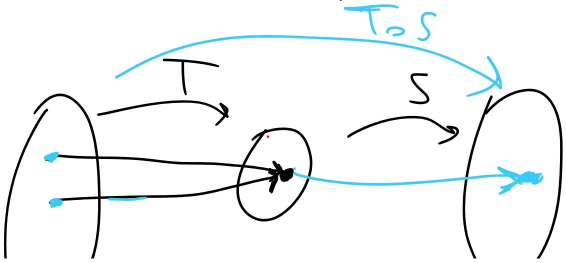
Otro camino: Usando el teorema de las dimensiones

$$\underbrace{\dim(V = \mathbb{R}^5)}_{=5} = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(T))}_{\leq 4} + \dim(N(T))$$

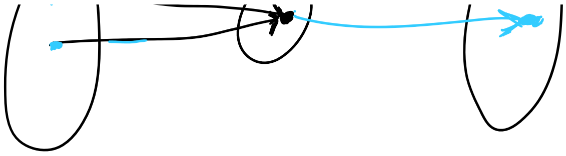
$$\mathrm{Im} \subseteq W = \mathcal{M}_{2\times 2} \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) \leq \dim(\mathcal{M}_{2\times 2}) = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(N(T)) \geq 1} \Rightarrow T \text{ no es inyectiva}$$

(A)



- como T no es inyectiva $\Rightarrow T \circ S$ no es inyectiva
- como S no es sobreyectiva



$\Rightarrow T \circ S$ no es inyectiva

- como S no es sobreyectiva

$\Rightarrow T \circ S$ no es sobreyectiva

3

4. Considere $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $T(p) = \cancel{q}$ con $\cancel{q(t)} = p(2t) + p(-2t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Entonces:

a) T es un ~~isomorfismo~~. Invertible

b) T es sobreyectiva pero no inyectiva.

c) $\dim(Im(T)) = 1$.

d) $\dim(Im(T)) = 3$.

e) $\dim(Im(T)) = 2$.

Isomorfismo $\approx$ Invertible

$$T(p_1) = p_1(\cancel{2t}) + p_1(\cancel{-2t}) = 0$$

$$T(p_2) = p_2(\cancel{2t}) + p_2(-2t) = 0$$

$p_1 \neq p_2$

$$p_1 = x^3 \to [x^3]$$

$$p_2 = x^2 \to [x^2]$$

$$p_3 = x \to [x]$$

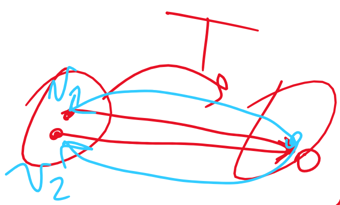
$$\Rightarrow N(T) = [x, x^2, x^3]$$

$$\Rightarrow \dim(N(T)) = 3$$

$$Im(T) = [1] = \{\alpha\}$$

$$\Rightarrow \dim(Im(T)) = 1$$

(o por el teorema dimensiones)



$T(0) = v_1$

$T(0) = v_2$

¿$v_1 \neq v_2$? $\to$ No sería función

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Si hay núcleo} \Rightarrow \text{No es invertible}}$

Ejercicio 7

Sean U, W subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ tales que $\dim(U) = 2$ y $\dim(W) = 3$. Entonces la dimensión de $U \cap W$

A. Necesariamente es 1.

B. Necesariamente es 2.

C. Únicamente puede tomar los valores 1 o 2. ← el correcto.

D. Únicamente puede tomar los valores 0, 1 o 2.

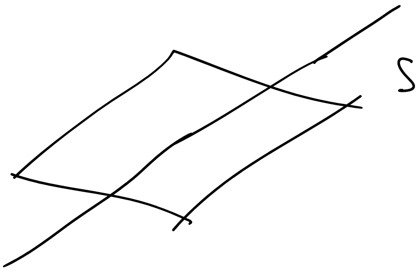
E. Únicamente puede tomar los valores 1, 2 o 3.

$$\begin{cases} \dim(U+W) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4 \\ U+W \subseteq \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

Propo8 $\quad \underset{\substack{\geq \\ 4}}{\dim(U+W)}\ \underset{\substack{\leq \\ 3}}{} = \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim(U)} + \underset{\substack{\| \\ 3}}{\dim(W)} - \dim(U \cap W)$

$2 \Rightarrow \geq \dim(U \cap W) \geq 1$

¿$\dim(U+W)$ tiene cota inferior? Si



Suma tiene como mínimo la dimensión mayor de cada subespacio.

$\leftarrow \dim = 2$

$$\begin{cases} U \subseteq U+W \\ W \subseteq U+W \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dim(U+W) \geq 3}$$

¿ $W \subseteq U+W$

dim$=3$