1. Concepto y ejemplos de transformaciones lineales

1. En los siguientes casos determinar si la función T es una transformación lineal:

   a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (y-x, z+y)$.

   b) $T: \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $T(f) = f(0)$, donde $\mathcal{C}[0,1] = \{f: [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua$\}$.

   c) Dado $v \in \mathbb{R}^3$ fijo, la función $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(u) = \langle u, v\rangle$.

   d) $T: \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \text{rango}(A)$.

   e) $T: \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $T(A) = A^t$.

   f) Dados V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y B una base de V, la función $T: V \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(v) = \text{coord}_B(v)$.

Prop.: $T: V \to W$ es una T.L. sii:

$$T(\alpha v + w) = \alpha T(v) + T(w) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall v, w \in V$$

Obs.: • El rango y el determinante no son una T.L.

$$rg(A+B) \neq rg(A) + rg(B)$$

Matrices

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

• El $\langle , \rangle$ es una T.L. (definido como en c))

• Caso a) *a)* $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (y-x, z+y)$. ← Si tengo términos al cuadrado

$(y^2 - x^2, z+y)$.

$\Rightarrow$ No es lineal

Si tengo funciones no lineales ejemplo

$(\text{sen}(y) - x, z+y)$

e) $T: \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $T(A) = A^t$.

$$\boxed{T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)}$$

Transformado de una C.L. me da una C.L. de los transformados

Probar que: $T(\underbrace{\alpha A + B}_{=M}) \stackrel{?}{=} \alpha T(A) + T(B)$ $\forall A, B$ cualesquiera

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) = T\Bigg(\overbrace{\begin{bmatrix} \alpha a_1 + b_1 & \alpha a_2 + b_2 \\ \alpha a_3 + b_3 & \alpha a_4 + b_4 \end{bmatrix}}^{=M}\Bigg) = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + b_1 & \alpha a_3 + b_3 \\ \alpha a_2 + b_2 & \alpha a_4 + b_4 \end{bmatrix}$$

Prop. de suma y producto — Aplico la T

$$\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix}' \quad \begin{bmatrix} b_3 & b_4 \end{bmatrix}' \overset{T}{\underset{\substack{\text{prop. de} \\ \text{suma y producto} \\ \text{por escalar de} \\ V = M_{n\times n}}}{=}} \begin{bmatrix} \alpha a_3+b_3 & \alpha a_4+b_4 \end{bmatrix}' \underset{\substack{\text{Aplico} \\ \text{la } T \\ \Rightarrow \text{Traspuesta}}}{=} \begin{bmatrix} \alpha a_2+b_2 & \alpha a_4+b_4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}}_{A^t} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}}_{B^t} = \alpha T(A) + T(B)$$

prop. de suma y producto por escalar de $V = M_{n\times n}$

2. *a*) Sea $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $\quad \{1, x, x^2\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}_2[x]$

$$T(1) = (1,0), \quad T(x) = (1,1), \quad T(x^2) = (0,0),$$

donde $\mathbb{R}_2[x]$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que 2. Hallar $T(p)$ para todo p.

b) Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1,0,0) = (2,1,0), \; T(1,1,0) = (-1,2,3), \; T(1,1,1) = (0,0,1).$$

¿Existe una única transformación lineal que verifique las condiciones dadas?. Justifique su respuesta. Si es afirmativa, entonces hallar $T(3,2,1)$.

c) Determinar si existe alguna transformación $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ que satisfaga

$$T(1) = (1,0), \; T(1+x) = (1,1), \; T(1+x+x^2) = (0,0), \; T(3+2x+x^2) = (2,1).$$

En caso de que exista, alguna hallarlas todas.

Ej 2)a): ¿Cómo se halla una T.L. a partir de saber cuánto vale en una ~~base~~?

Prop.: Sea $T: V \to W$ T.L. está definida en $B \xrightarrow{b} V$ (conozco $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$) $\quad B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow T$ es única.

$$T(1) = (1,0), \quad T(x) = (1,1), \quad T(x^2) = (0,0), \qquad B = \{\overset{v_1}{1}, \overset{v_2}{x}, \overset{v_3}{x^2}\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}_2[x]$$

$\underset{\text{genérico}}{¿T(p)} = (c + bx + ax^2)? \Rightarrow$ Llego aparecer a la base.

$\Rightarrow$ Escribo p como c.l. de la base.

$$T(p) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) =$$

$T(p) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) = \ldots$

T.L. por letra

Conocidos

Condiciones

$$\boxed{\begin{aligned} T(v_1) &= T(1) = (1,0) \\ T(v_2) &= T(x) = (1,1) \\ T(v_3) &= T(x^2) = (0,0) \end{aligned}} \Rightarrow \ldots = \underset{c}{\alpha_1}(1,0) + \underset{b}{\alpha_2}(1,1) + \underset{a}{\alpha_3}(0,0)$$

$\Rightarrow$ Falta hallar $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \text{coord}_B(P)$

$\Rightarrow$ Resuelvo un sistema

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 x^2 = \underbrace{c + bx + ax^2}_{P}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = c \\ \alpha_2 = b \\ \alpha_3 = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{T(p) = T(c + bx + ax^2) = c(1,0) + b(1,1) = (c+b, b)}$$

3. En los siguientes casos hallar la expresión analítica de las transformaciones lineales que cumplen las condiciones dadas, y determinar cuántas hay:

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (2,1,0)$, $T(1,2,1) = (-1,2,3)$, $T(1,0,-3) = (0,0,1)$;

b) $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(M_1) = (1,-1),\ T(M_2) = (1,1),\ T(M_3) = (1,1),\ T(M_4) = (3,1),\ T(M_5) = (1,-3),$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\} \xrightarrow{\text{Reduzco}}$ Sub. conjunto maximal independiente

1. < 4 elementos
   - 1.1 S.C.I. (Infinitas T)
   - 1.2 S.I. ($\nexists T$) las otras matrices generan incompatibilidad
2. $= 4$ elementos
   - 2.1 S.C.D ($\exists! T$)
   - 2.2 S.I. ($\nexists T$) las otras matrices generan incompatibilidad,

1)

(otras matrices generan incompatibilidad, ya que sus transformadas no preservan la misma C.L. que tienen entre matrices)

(otras matrices generan incompatibilidad, ya que sus transformadas no preservan la misma C.L. que tienen entre matrices)

$$\underbrace{T(M)}_{\parallel} = T(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 + \alpha_5 M_5)$$

$T(M_1) = (1,-1)$, $T(M_2) = (1,1)$, $T(M_3) = (1,1)$, $T(M_4) = (3,1)$, $T(M_5) = (1,-3)$,

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{\text{T.L.}}{=} \alpha_1 T(M_1) + \alpha_2 T(M_2) + \alpha_3 T(M_3) + \alpha_4 T(M_4) + \alpha_5 T(M_5)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4+\alpha_5 & \alpha_1+2\alpha_3+3\alpha_4 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 & \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4+3\alpha_5 \end{pmatrix} = \alpha_1 M_1 + \ldots + \alpha_5 M_5$$

$$\begin{cases} a = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4+\alpha_5 \\ b = \alpha_1+2\alpha_3+3\alpha_4 \\ c = \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 \\ d = \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4+3\alpha_5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & b \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & d \end{array}\right]$$

$\boxed{\rho = 4 < n}$ $\boxed{\text{Indeterminado}}$

$$\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & b-a \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & d-a \end{array}\right] \xrightarrow[F_4+F_2]{F_3-2F_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & c-a-2b+2a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & d-a+b-a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3-2F_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & c-a-2b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{(c+a-2b)-2(d+b-2a)}_{\neq 0?} \end{array}\right] = c+5a-4b-2d \neq 0 ?$$

$\underline{\underline{No}}$, a, b, c, d cualesquiera

$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}$

$\Rightarrow$ Caso 1 $\Rightarrow$ Tengo menos que una base.

Para ver si es 1.1 o 1.2 debo comparar transformadas y ver que sean coherentes $\to$ no $\nexists$ T.L.

$\to$ si $\exists$ infinitas.