6. **Rango.** En este ejercicio se vincula el rango de una matriz con la dimensión de cierto espacio asociado a ella. En cada parte se brinda una $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y se debe calcular:

- rango(A)
- La dimensión del espacio Ker $A = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1} : AX = 0\}$. ← núcleo
- Verificar que dim(Ker A) + rango(A) = n.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *b)* $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ *c)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

• rango(A):

b) $\xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+2F_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $rg(A) = 2$

• ker(A):

Por definición:

$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}^4} = 0 \iff \begin{bmatrix} -2x_1+4x_2-2x_3-4x_4 \\ 2x_1-6x_2-3x_3+x_4 \\ -3x_1+8x_2+2x_3-3x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^4 \longrightarrow dim = 4 = n$

$\underbrace{(3\times \cancel{4})(\cancel{4}\times 1)}_{3\times 1}$

(Ya escalerizamos)

$\iff \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \iff$ S.C.I.

Obs.: El teorema de las dimensiones me dice la dimensión de la solución:

$$\boxed{\underset{4}{\underset{\shortparallel}{n}} = \underbrace{dim(N(A))}_{dim(N(A))=2} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{rg(A)}}}$$

Lo chequeamos:

F_2: $\boxed{\dfrac{-2x_2-5x_3}{3} = x_4}$

$\Downarrow$

F_1: $-x_1+2x_2-x_3-2\left(\dfrac{-2x_2-5x_3}{3}\right) = 0$

$\dfrac{(6+4)x_2+(-3+10)x_3}{3} = \boxed{x_1 = \dfrac{10x_2-7x_3}{3}}$

$\Rightarrow \ker(A) = \{(10/3\, x_2 - 7/3\, x_3,\ x_2,\ x_3,\ -2/3\, x_2 - 5/3\, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= [(10/3, 1, 0, -2/3), (-7/3, 0, 1, -5/3)]$

Obs.: Se cumple el teo. de las dimensiones ($\dim(\ker(A)) = 2$).

Suma de subespacios

Def.: V: $\mathbb{K}$-E.V. $W_1, W_2 \subseteq V$ sub. espac. vect. $\Rightarrow$

$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2\}$

Def.: V: $\mathbb{K}$-E.V. $\Rightarrow$ $W_1 \oplus W_2$ $\Leftrightarrow$ $\exists!\, w_1 \in W_1$, $\exists!\, w_2 \in W_2$ t.q.

(suma directa)

$v = w_1 + w_2 \quad \forall v \in (W_1 + W_2)$

Prop.: $W_1 \oplus W_2 = V$ sii:

1. $V = W_1 + W_2$
2. $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}_V\}$

Prop.: $W_1 \oplus W_2$; $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\} \xrightarrow{b} W_1$, $B_2 = \{v'_1, \ldots, v'_m\} \xrightarrow{b} W_2$

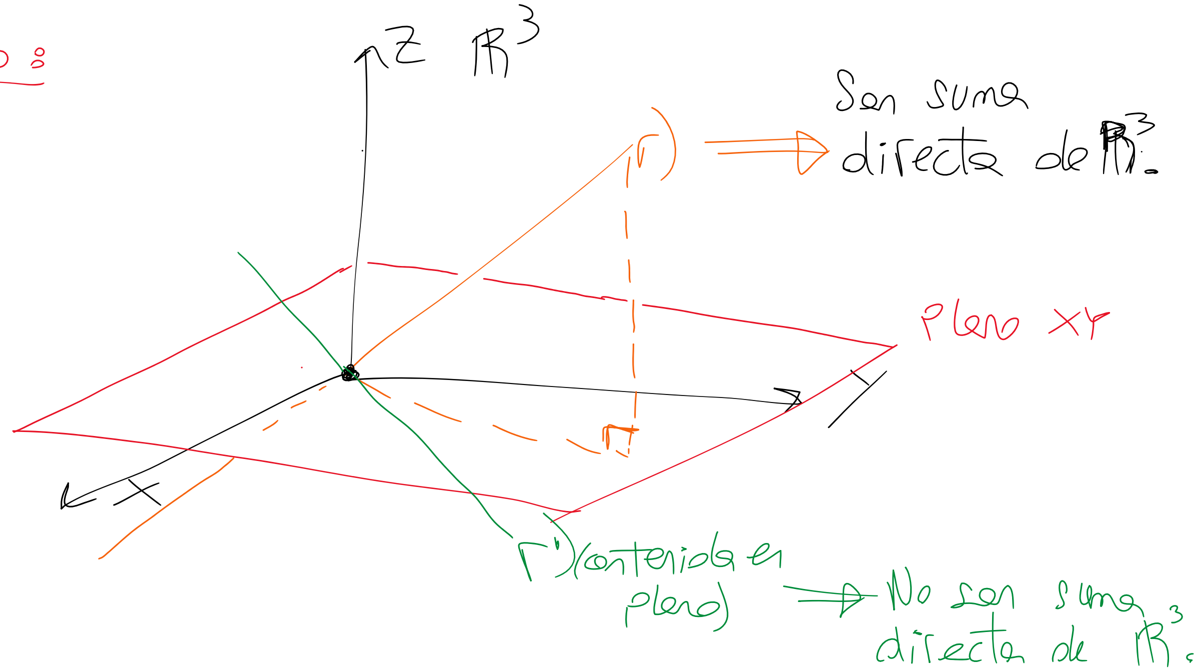
$\Rightarrow$ Puedo escribir a la base de $V = W_1 \oplus W_2$ como:

$$\boxed{B = B_1 \cup B_2, \quad B \xrightarrow{b} V}$$

Corolario: $(\dim(W_1) = \# B_1,\ \dim(W_2) = \# B_2)$. $W_1 \oplus W_2 = V \Rightarrow$

$$\boxed{\dim(W) = \# B = \dim(W_1) + \dim(W_2)}$$

Ejemplo:



1. En cada caso, hallar bases de los subespacios S_1, S_2, S_1+S_2 y $S_1 \cap S_2$. En función de ello, deducir cuándo la suma es directa.

   a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

   b) $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = ax^2,\ \text{con } a \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = cx^2 + bx + c,\ \text{con } b, c \in \mathbb{R}\}$.

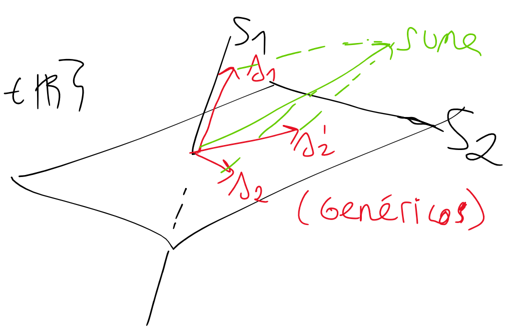
$c \cdot (x^2+1) + b \cdot (x)$ → comb. lineal de la base.

b) $S_1 = [x^2] \longrightarrow \dim(S_1) = 1$

$S_2 = [x^2+1, x] \longrightarrow \dim(S_2) = 2$

$\Rightarrow S_1 + S_2 = \{\alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x^2+1) + \alpha_3 (x),\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \{(\alpha_1 + \alpha_2) x^2 + \alpha_3 x + \alpha_2\}$



¿Base de $S_1 + S_2$?

$= \{(a+b)x^2 + cx + b\} \longrightarrow \dim = 3$

$S_1 \cap S_2$: $v \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow v \in S_1$ y $v \in S_2$

$\Rightarrow \; v = \vec{0} \quad (b=0 \,,\, c=0) \quad \Rightarrow \quad S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}_V\}$