Práctico 9:

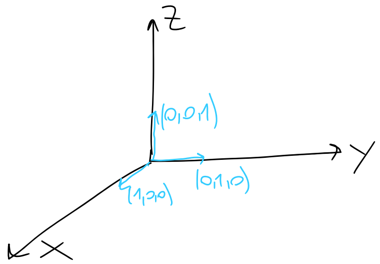
Def.: Una base de V es un subconjunto finito $B=\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ tal que:
- B es linealmente independiente
- $V=[B]$

Def.: La dimensión de un $V:\mathbb{K}$-EV es:

$$\dim(V)=\operatorname{card}(B)$$

donde B es cualquier base de V.

Ejemplo $V=\mathbb{R}^3$: $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.



obs.:
- $\operatorname{card}(A)=n=\dim(V)$
- A es L.I.

$\Rightarrow$ A es una base V $\left(A \xrightarrow{b} V\right)$

obs.: $V=\mathbb{R}^3$. $\dim(\mathbb{R}^3)=3$. $\Rightarrow$ cualquier conjunto L.I. de 3 elementos es base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo: $\{(-1,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

Def.: Las coordenadas de un vector en una base, son los coeficientes de la C.L. (es única) que aplico base para obtener el vector.

1. En los siguientes casos, hallar una base y la dimensión del subespacio S del espacio vectorial V.

   a) $V=\mathbb{R}^3$, $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$.

   b) $V=\mathbb{R}_3[x]$, $S=\{p\in\mathbb{R}_3[x] : p(2)=0\}$.

   c) $V=\mathcal{M}(\mathbb{R})_{3x3}$, $S=\{A\in\mathcal{M}_{3x3} : A \text{ es simétrica}\}$.

   d) $V=\mathcal{M}(\mathbb{R})_{2x2}$, $S=\{A\in\mathcal{M}_{2x2} : \operatorname{tr}(A)=0\}$.

a) $z = x+2y \Rightarrow S = \{(x, y, x+2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x\cdot(1,0,1) + y\cdot(0,1,2) : \text{'' ''}\}$

$x = x$

$y = y$

$$\boxed{S = [(1,0,1),(0,1,2)] \quad \left(\{(1,0,1),(0,1,2)\} \xrightarrow{b} S\right)}$$

$$\boxed{\dim(S) = 2}$$

b) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p(2) = 8a + 4b + 2c + d = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = -8a - 4b - 2c \\ c = c \\ b = b \\ a = a \end{cases}$

$\Rightarrow p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + (-8a - 4b - 2c) = a(x^3 - 8) + b(x^2 - 4) + c(x - 2)$

$$\Rightarrow \boxed{S = [x^3 - 8, x^2 - 4, x - 2]}$$

$$\boxed{\dim(S) = 3}$$

d) $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $tr(M) = a + d = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -d}$

$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{'' ''} \right\}$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]}$$

$$\boxed{\dim(S) = 3}$$

2. En cada parte, el conjunto S es un conjunto generador del espacio vectorial V. Encontrar una base que sea un subconjunto de S.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,-1,2), (4,-3,7), (2,0,5), (1,2,6)\}$.

b) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Base $\Rightarrow$ L.I. $\Rightarrow$ $\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$ S.C.I. $\Rightarrow$ L.D.

$(rg(\ ) < 4)$

cant. incógnitas

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{F_2+F_1}\\ \xrightarrow{F_3-2F_1}\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}1&4&2&1&0\\0&1&2&3&0\\0&-1&1&4&0\end{array}\right]\xrightarrow{F_3+F_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&4&2&1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&3&7&0\end{array}\right]$$

$\alpha_2+2(-7/3\,\alpha_4)+3\alpha_4=0$

$\to 3\alpha_3+7\alpha_4=0$

$\boxed{\alpha_3=-\frac{7}{3}\alpha_4}$

$\alpha_2+\left(\frac{\overbrace{-14+9}^{-5}}{3}\right)\alpha_4=0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2=5/3\,\alpha_4}$

F_1: $\alpha_1+4(5/3\,\alpha_4)+2(-7/3\,\alpha_4)+\alpha_4=0 \Rightarrow \alpha_1+\left(\frac{\overbrace{20-14+3}^{9}}{\cancel{3}}\right)\alpha_4=0$

$\boxed{\alpha_1=-3\alpha_4}$

$\Rightarrow$ G.L. es $\alpha_4 \Rightarrow$ Elimino $(1,2,6)$

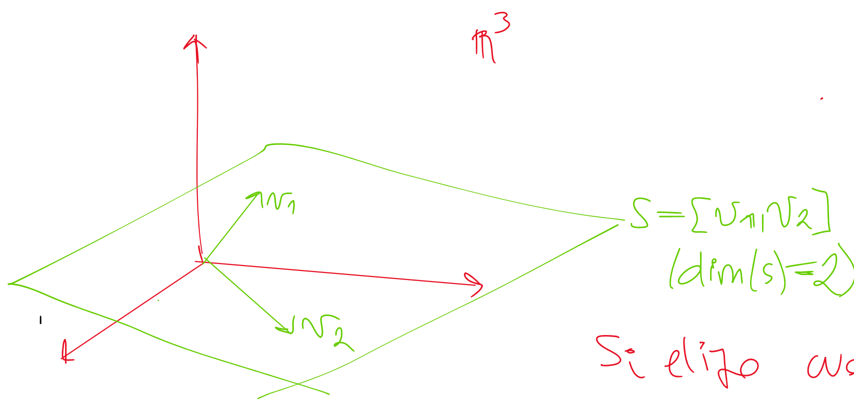
$\Rightarrow S=[(1,-1,2),(4,-3,7),(2,0,5)]$ $\quad \left(\{(1,-1,2),(4,-3,7),(2,0,5)\} \xrightarrow{b} S\right)$

3. Sea S un subconjunto LI de V. Agregar vectores a S hasta conformar una base de V.

a) $V=\mathbb{R}^4$, $S=\{(1,0,2,2),(1,1,0,0)\}$.

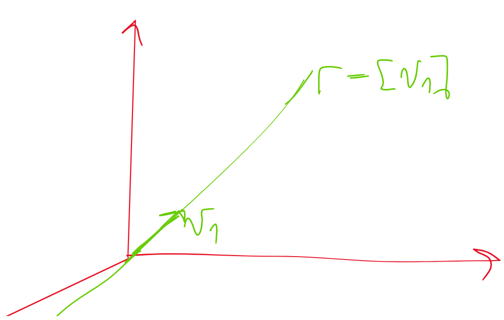
b) $V=\mathbb{R}_3[x]$, $S=\{1-x+x^2, x-x^2\}$.

Obs.:



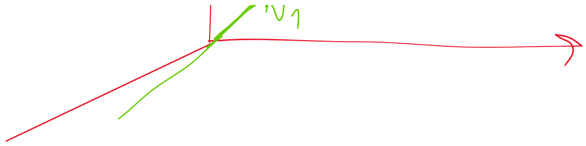
Si elijo cualquier v_3 t.q. $v_3\notin S$

$\Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ L.I.



Si elijo cualquier v_2 t.q. $v_2\notin S$

$\Rightarrow \{v_1 v_2\}$ L.I.



a) $S=[v_1,v_2]$ ¿v_3? Elijo v_3 t.q. $v_3 \notin [v_1,v_2] \Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ L.I.

¿v_4? v_4 t.q. $v_4 \notin [v_1,v_2,v_3] \Rightarrow \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ L.I. (Tmb. base de $\mathbb{R}^4$)

Otra manera:

Prop.: Si $\{v_1,\dots,v_k\}$ es L.I. y $\langle v_{k+1}, v_i\rangle = 0 \quad \forall i=1,\dots,k$
$\Rightarrow \{v_1,\dots,v_k,v_{k+1}\}$ es L.I.

Prop.: Si A conjunto ortogonal $\Rightarrow$ A es L.I.
($\nLeftarrow$ Recíproco es falso)

4. En cada ítem probar que $\mathcal{B}$ es una base del espacio V, y hallar las coordenadas del vector v en la base $\mathcal{B}$.

a) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$, y $v = (1,2,3)$.

b) $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$, $V = \mathcal{M}_{2x2}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

a) $\left.\begin{array}{l} \dim(\mathbb{R}^3)=3 \\ \\ \mathcal{B} \text{ es L.I.} \end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$

$\left(\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1+0+1-[0+0+0] = 2 \neq 0 \right)$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\1&1&0&2\\0&1&1&3\end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{F_2-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&1&1&3\end{array}\right] \xrightarrow{F_3-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&2&2\end{array}\right] \to \boxed{\alpha_3=1}$$

$$\boxed{\alpha_2 = 1+\alpha_3 = 2}$$

$$\alpha_1+\alpha_3 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$$\boxed{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \text{coord}_B(1,2,3) = (0,2,1)}$$

Chequeo: $0\cdot(1,1,0)+2\cdot(0,1,1)+1\cdot(1,0,1) = (1,2,3)$ ✓

5. Discutir según $\alpha \in \mathbb{R}$ si el conjunto $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[t]$ donde

$$p_1(t) = 1+t, \qquad p_2(t) = 1+\alpha t + t^2, \qquad p_3(t) = 1+t^2.$$

$$\left.\begin{cases} \#A = 3 \\ \dim(\mathbb{R}_2[t]) = 3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Si es L.I.} \Rightarrow \text{Base.}$$

6. **Rango.** En este ejercicio se vincula el rango de una matriz con la dimensión de cierto espacio asociado a ella. En cada parte se brinda una $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y se debe calcular:

- rango(A)
- La dimensión del espacio Ker $A = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1} : AX = 0\}$. ← Ker: "kernel" = Núcleo. "Ker(A)" - "N(A)".
- Verificar que dim(Ker A) + rango(A) = n.

a) $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ *b)* $A = \begin{pmatrix}-2&4&-2&-4\\2&-6&-3&1\\-3&8&2&-3\end{pmatrix}$ *c)* $A = \begin{pmatrix}1&2&3&-4&8\\1&2&0&2&8\\2&4&-3&10&9\\3&6&0&6&9\end{pmatrix}$.

Teorema de las dimensiones (Matrices): V: K-EV $\dim(V) = n$ (cantidad columnas matriz)

$$\Rightarrow \dim(N(A)) + \text{rg}(A) = n$$

$$\underset{K\text{-}EV}{V}{}_{(\dim(V)=n)} \xrightarrow{A} W_{(\dim(W)=m)}$$

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}_{m\times n} & \begin{bmatrix}x_1\\ | \\ x_n\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}x_1'\\ | \\ x_m'\end{bmatrix} \\ A & v & & A(v)\end{array}$$