Práctico 8

Def.: (Comb. lineal)

Sea V: $\mathbb{K}$-E.V. y $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$

$\Rightarrow v \in V$ es C.L. de $A \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.q.

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

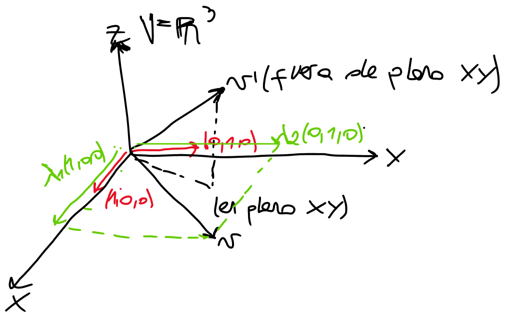
Def.: (Generador)

Sea V: $\mathbb{K}$-E.V. y $A = \{v_1, \ldots, v_n, \ldots\}$

$\Rightarrow A$ es generador de $V \Leftrightarrow \forall v \in V \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.q.

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Ejemplo:



$A = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

Obs.: • Para cualquier v coplanar con $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ (plano XY)

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0)$

$\Rightarrow \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ Es generador del plano XY.

• ¿A es generador de $\mathbb{R}^3$?

No, $\nexists \lambda_1, \lambda_2$ t.q. v' se escriba como C.L. de el conj. A.

$\Rightarrow$ Necesitamos más elementos en el conjunto (Y que sean L.I.)

$\Rightarrow \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \longrightarrow$ Generador de $\mathbb{R}^3$

otro ejemplo:

$$\{\underset{\lambda_1}{(1,1,0)}, \underset{\lambda_2}{(1,-1,0)}, \underset{\lambda_3}{(0,0,1)}\} \longrightarrow \text{Generador de } \mathbb{R}^3$$

Obs.: Pueden haber infinitos generadores para un E.V. dado.

1. Investigar si el vector v se puede escribir como combinación lineal del conjunto $\mathcal{A}$, y en caso afirmativo hallar alguna de ellas.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,2,1), (3,-1,5), (1,1,0)\}$ y $v = (3,0,6)$.

   b) $\mathcal{A} = \{(2,3,5), (1,2,4), (-2,2,3)\}$ y $v = (10,1,4)$.

   c) $\mathcal{A} = \{(1,3,2,1), (2,-2,-5,4), (2,-1,3,6)\}$ y $v = (2,5,-4,0)$.

   d) $\mathcal{A} = \{2-x, 2x-x^2\}$ y $v = 6-5x+x^2$.

   e) $\mathcal{A} = \{3x^3+x, -2x^2+x-1, 3x^3-2x^2+2x-1\}$ y $v = -3x^3+4x^2+x-2$.

1. Investigar si el vector v se puede escribir como combinación lineal del conjunto $\mathcal{A}$, y en caso afirmativo hallar alguna de ellas.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,2,1), (3,-1,5), (1,1,0)\}$ y $v = (3,0,6)$.
   b) $\mathcal{A} = \{(2,3,5), (1,2,4), (-2,2,3)\}$ y $v = (10,1,4)$.
   c) $\mathcal{A} = \{(1,3,2,1), (2,-2,-5,4), (2,-1,3,6)\}$ y $v = (2,5,-4,0)$.
   d) $\mathcal{A} = \{2-x,\ 2x-x^2\}$ y $v = 6-5x+x^2$.
   e) $\mathcal{A} = \{3x^3+x,\ -2x^2+x-1,\ 3x^3-2x^2+2x-1\}$ y $v = -3x^3+4x^2+x-2$.
   f) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   g) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$.

a) ¿$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.q.:?

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{sistema de ecuaciones.}$$

→ S.C.D. } ⇒ $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ⇒ v es C.L.
→ S.C.I. }
→ S.I.: ⇒ $\nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ⇒ v no es C.L.

⇒ Usar las herramientas previas para determinar si es un sist. compatible.

① $b = Ax$ $\xrightarrow{\text{Resuelvo}}$ $\boxed{A^{-1} b = x_{solución}}$ (S.C.D ⇔ A es invertible (det(A) ≠ 0))

Matriz

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

⇒ Hago el determinante:

$$\det(A) = 0 + 3 + 10 - [-1 + 0 + 5] = 13 - 4 \neq 0$$

⇒ $(3,0,6)$ es C.L. de $\{(1,2,1),(3,-1,5),(1,1,0)\}$

obs.: como el conj. A es generador de $\mathbb{R}^3$ ⇒ cualq. $v \in \mathbb{R}^3$ es C.L. del conj. A.

Hallemos una (única que va a haber) C.L.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -7 & -1 & | & -6 \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{7F_3+2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -7 & -1 & | & -6 \\ 0 & 0 & -9 & | & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -1}$$

($F_2 - 2F_1$, $F_3 - F_1$)

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{-6 + \overset{-1}{\lambda_3}}{-7} = \boxed{1 = \lambda_2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 - 3\underbrace{\lambda_2}_{1 \to -3} - \underbrace{\lambda_3}_{-1 \to +1} = \boxed{1 = \lambda_1}$$

Chequeo

$\rightarrow (3,0,6) \overset{?}{=} 1\cdot(1,2,1)+1\cdot(3,-1,5)+(-1)(1,1,0) = (3,0,6)$ ✓

d) $\mathcal{A} = \{\overset{\lambda_1}{\widehat{2-x}},\ \overset{\lambda_2}{\widehat{2x-x^2}}\}$ y $v = 6-5x+x^2$.

$V = \mathcal{P}_2[x] \qquad a_2x^2+a_1x+a_0 \in \mathcal{P}_2[x]$

• Dos Polinomios son iguales si coinciden sus coeficientes.

$$6-5x+x^2 = \lambda_1(2-x)+\lambda_2(2x-x^2)$$
$$= 2\lambda_1 - \lambda_1 x + 2\lambda_2 x - \lambda_2 x^2$$
$$= 2\lambda_1 + (2\lambda_2-\lambda_1)x - \lambda_2 x^2$$

$$\begin{aligned} 6 &= 2\lambda_1 \\ -5 &= 2\lambda_2 - \lambda_1 \\ 1 &= -\lambda_2 \end{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{c|cc} 6 & 2 & 0 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \boxed{\lambda_1 = 3} \\ \\ \rightarrow \boxed{\lambda_2 = -1} \end{array}$$

chequeo la 2ª fila

$\rightarrow -5 \overset{?}{=} -1\cdot(3)+2\cdot(-1)$

$-5 = -5$ ✓

$\Rightarrow$ S.C.D.

2. Hallar un generador finito de los siguientes subespacios S.

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$.
b) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1-x) = p(1+x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.
c) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0\}$.
d) $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) : A$ es simétrica$\}$.
e) $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) : A$ es antisimétrica$\}$.

a) Plano, $z = -x-y \Rightarrow S = \{(x,y,-x-y)\}$
$x = x$
$y = y$

$= \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1)\}$

Separar en letras

son los coeficientes de la C.L. (λ_1 y λ_2)

Generador del plano S

$\Rightarrow \boxed{S = [(1,0,-1),(0,1,-1)]}$

rectas

d) $V = \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$

$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$

lo escribo explicitamente

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

lo escribo [c e f]
explícitamente

$$\underset{\text{Separo}}{=} \left\{ a\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{v_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{v_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}}_{v_3} + d\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{v_4} + e\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}_{v_5} + f\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{v_6} \right\}$$

a, b, c, d, e, f, g son coef. de C.L.

$S = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6]$

<u>obs.</u>: La dimensión del sub.esp. de las matrices simétricas

$\dim(M_{sim}) = 6$ = cant. de elementos del conjuntos.