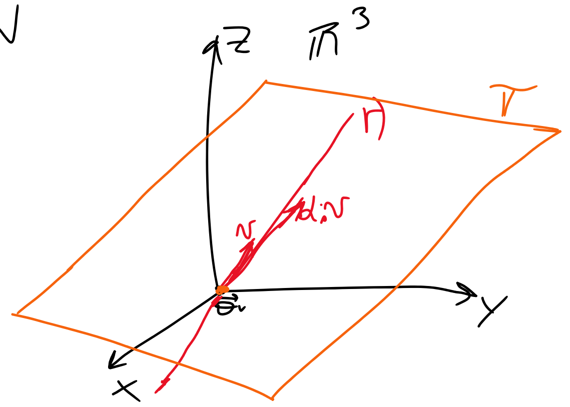
Def.: V: $\mathbb{K}$-EV, $W \subseteq V$ es un S.E.V. (subespacio vectorial) sii:

① $w_1 + w_2 \in W$ $\quad \forall w_1, w_2 \in W$

② $\alpha w \in W$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall w \in W$

Prop.: Si $W \subseteq V$ es un S.E.V. $\Rightarrow \vec{0}_V \in W$
(V: $\mathbb{K}$-E.V.)

(contrarrecíproco: $\vec{0}_V \notin W \Rightarrow W \subseteq V$ no es un S.E.V.)



Planos, rectas que pasan por el origen son S.E.V.

5. Determinar si los subconjuntos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son subespacios vectoriales.

a) El conjunto de las matrices simétricas, es decir, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \colon A^T = A\}$.
b) El conjunto de las matrices antisimétricas, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \colon A^T = -A\}$.
c) El conjunto de las matrices invertibles.
d) El conjunto de las matrices no invertibles.
e) El conjunto de matrices de rango k, para $k = 0, 1, \ldots, n$;
f) El conjunto de matrices de traza 0 (recordar que la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal).

Prop.: $W \subseteq V$ es un S.E.V. $\Leftrightarrow \alpha w_1 + w_2 \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall w_1, w_2 \in W$

(combinación lineal)
$(\alpha w_1 + \beta w_2)$

Prop.: $W \subseteq V$ es un S.E.V. $\Rightarrow W$ es un E.V.

5) a) $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $\quad V$: $\mathbb{K}$-E.V.

$S = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \colon A^t = A\}$

Dem.: Sea $A, B \in S$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Tengo que dem. que:

$\alpha A + \beta B \in S \Rightarrow \underbrace{(\alpha A + \beta B)^t}_{\text{Prop. transp.}} = \alpha A + \beta B$

$\underbrace{(\alpha A)^t + (\beta B)^t}_{\text{Prop. transp.}}$

$(\alpha A)^t + (\beta B)^t$

$\underbrace{\quad}_{\text{prop. transp.}}$

$\underbrace{\alpha A^t + \beta B^t}_{\text{Uso la hipótesis } A\in S,\ B\in S}$

$\Downarrow$

$\alpha A + \beta B$ ■

c) $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $V:\mathbb{K}$-E.V.

$S = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ con $A^{-1}A = Id\}$

<u>contraejemplo:</u> $\vec{0}_V = O_{n\times n}$ (Matriz nula) $\notin S$.

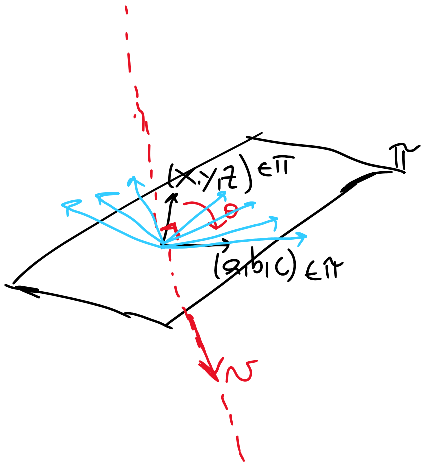
<u>Contraejemplo②:</u> $\underset{\in S}{\underset{\det=2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}} + \underset{\in S}{\underset{\det=2}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}} = \underset{\notin S}{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$

6. Determinar en qué condiciones los siguientes conjuntos S son subespacios de $\mathbb{R}^3$. $=V$

a) Fijo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $S = \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = d\}$.
b) Fijo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ y $v \in \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : (x,y,z) \wedge (a,b,c) = v\}$.
c) Fijo $r \in \mathbb{R}$, $S = \{(x,y,z) : \|(x,y,z)\| = r\}$.

b) $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ y $v \in \mathbb{R}^3$ (fijo)

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \wedge (a,b,c) = v\}$



- $(x,y,z)\in\pi$
- $\underbrace{\|(a,b,c)\|}_{\text{Fijo}} \cdot \underbrace{\|(x,y,z)\|}_{\text{Variable}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(\theta)}_{} = \underbrace{\|v\|}_{\text{Fijo}}$

Tomo $\vec{0}_V = (0,0,0)$

¿$(0,0,0) \in S$?

¿$(0,0,0) \wedge (a,b,c) = v$?

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{0} = v}$ (I) (Condición necesaria, falta ver que es suficiente)

① ¿$(x,y,z) + (x',y',z') \in S$?

$(x,y,z) \in S$ y $(x',y',z') \in S$

$\Rightarrow [\lambda(x,y,z) + (x',y',z')] \wedge (a,b,c) = v$

<u>2 casos:</u> • $v \neq \vec{0} \Rightarrow$ No es S.E.V

• $v = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{[\lambda(x,y,z) + (x',y',z')] \wedge (a,b,c)}_{\text{prop. del prod. vectorial}} \overset{?}{=} 0$

$\lambda \underbrace{(x,y,z)\wedge(a,b,c)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{(x',y',z')\wedge(a,b,c)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$

otra manera

Ⓣ $(\alpha v_1 + v_2)\wedge w = v$

Ⓗ $v_1 \wedge w = v$
$v_2 \wedge w = v$

$\alpha \underbrace{v_1 \wedge w}_{v} + \underbrace{v_2 \wedge w}_{v} \overset{?}{=} v$

$\lambda\underbrace{(x,y,z)\wedge(a,b,c)}_{\overset{\parallel}{0}} + \underbrace{(x',y',z')\wedge(a,b,c)}_{\overset{\parallel}{0}}$

Por $(x,y,z)\in S$ Por $(x',y',z')\in S$

$\Rightarrow \lambda(x,y,z)+(x',y',z')\in S$

$\Rightarrow$ S es un S.E.V ($\Leftrightarrow v=\theta$)

$\alpha \underbrace{v_1\wedge w}_{v} + \underbrace{v_2\wedge w}_{v} = v$

$\alpha v + v \overset{?}{=} v$

$(\alpha+1)v = v$

Obs.: $S=\{(x,y,z) : (x,y,z)\wedge(a,b,c)=0\}$

$\Rightarrow (x,y,z)$ es colineal a (a,b,c) ($\operatorname{sen}(\theta)=0$, $\theta=0$)

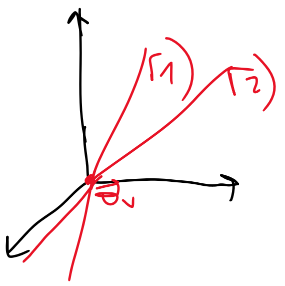
e) $S=\{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = d\}$

Busco una condición necesaria ($\vec{\theta}_v \in S$)

$\Rightarrow \langle (0,0,0),(a,b,c)\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{d=0}$

$\Rightarrow$ compruebo de que es un S.E.V. (Además suficiente).

Ejemplo: Pasa por el origen pero no es un S.E.V.



¿$S = r_1 \cup r_2$ es S.E.V?

c) Para el espacio vectorial $V=\mathbb{R}_n[x]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes reales, considerar:

1) $S=\{p\in\mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha)=0\}$, donde $\alpha\in\mathbb{R}$ es un valor fijo;
2) $S=\{p\in\mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha)=p'(\alpha)=0\}$, donde $\alpha\in\mathbb{R}$ es un valor fijo;
3) $S=\{p\in\mathbb{R}_n[x];$ el grado de p es $n\}$;

$a_nx^n + \_\_\_ + a_1x + a_0 \in V$

① S $\rightarrow$ Polin. con raíz en α.

Tengo que dem. que:

$(\lambda p_1+p_2)(\alpha)=0$

Dem.: Uso que $(f+g)(x_0)=f(x_0)+g(x_0)$

$\Rightarrow \underbrace{\lambda p_1(\alpha)}_{\overset{\parallel}{0}} + \underbrace{p_2(\alpha)}_{\overset{\parallel}{0}} = 0 \Rightarrow (\lambda p_1+p_2)\in S \Rightarrow$ S es un S.E.V.

$p_1\in S$ $p_2\in S$

9. **Espacios vectoriales de funciones.** Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios.

a) $S = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es continua}\}$;
b) $S = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es derivable}\}$;
c) $S = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es derivable y } f' = -f\}$;
d) $S = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es acotada}\}$.

b) ¿$(\lambda f+g)(x)$ es derivable?

$$(\lambda f+g)(x) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\text{derivable}} + \underbrace{g(x)}_{\text{derivable}} \Rightarrow (\lambda f+g)(x) \text{ es der. } (\in S) \Rightarrow S \text{ es S.E.V.}$$

Uso la suma de funciones der. es derivable y la multiplic. por escalar tmb. es deriv.