Práctico 7: Espacios Vectoriales

Def.: $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial (E.V.) sobre $\mathbb{K}$ si cumple:

conj. cuerpo operación.

① $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ $\quad \forall v_1, v_2 \in V$

② $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ $\quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$

③ $\exists \vec{0}_v \in V$ t.q. $\vec{0}_v + v = v$ $\quad \forall v \in V$

neutro de la suma

(Para cada)

④ $\forall v \in V, \exists w \in V$ t.q. $v + w = \vec{0}_v$

④ Negación

$\longmapsto \exists v \in V$ t.q. $\nexists w \in V$ t.q. $v + w = \vec{0}_v$

⑤ $1 \cdot v = v$ $\quad \forall v \in V$

⑥ $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

⑦ $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V$

⑧ $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

1. Probar que los siguientes conjuntos con las operaciones que se definen son espacios vectoriales.

   a) El conjunto $\mathbb{R}^n$, de los vectores de n coordenadas, con la suma y el producto por escalares coordenada a coordenada.

   b) El conjunto $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, de las matrices cuadradas de tamaño n, con la suma y el producto por escalares entrada a entrada.

   c) El conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, definiendo la suma como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y el producto por escalares como $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

1) a) $V = \mathbb{R}^n$ $\quad +$ habitual $\quad \cdot$ habitual

① Probar que

$v_1 + v_2 \overset{?}{=} v_2 + v_1$, $\quad v_1 = (x_1, \ldots, x_n)$, $\quad v_2 = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\underbrace{(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)}_{\text{Usemos "+" definida en letra}} \overset{?}{=} (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\underbrace{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)}_{\text{conmutativa en } \mathbb{K} = \mathbb{R}} \overset{?}{=} (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\underbrace{(y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n)}_{\text{Usemos "+"}} \overset{?}{=} (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n)$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \quad \blacksquare$$

② $$\underbrace{(x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n))}_{\text{Uso "+"}} \overset{?}{=} \underbrace{((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n))}_{\text{Uso "+"}} + (z_1, \ldots, z_n)$$

$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^3$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \overset{?}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n)$$

$$\underbrace{(x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n))}_{\text{por asociativa en } \mathbb{K} = \mathbb{R}} \overset{?}{=} ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n)$$

$$((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) = ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \quad \blacksquare$$

③ Propongo $\vec{0}_v = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

Tomo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \vec{0}_v + v = v$

$$\Rightarrow \underbrace{(0, \ldots, 0) + (x_1, \ldots, x_n)}_{\text{Uso "+" de la letra}} \overset{?}{=} (x_1, \ldots, x_n)$$

$$(0 + x_1, \ldots, 0 + x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \quad \blacksquare$$

neutro de

uso "+" de la letra

$(0+x_1, \dots, 0+x_n) = (x_1, \dots, x_n)$

neutro de la suma en $\mathbb{R}$

(4), (5), (6), (7), (8) continuas......

$\Rightarrow \mathbb{R}^n$ con "+" y "·" definidos son un E.V.

2. Probar que, en ninguno de los siguientes casos, las operaciones de suma y producto por escalares definidas hacen de $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial.

   a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2)$, $\lambda(x_1, y_1) = (3\lambda y_1, x_1)$;
   b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$;
   c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$, $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$;
   d) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)$, $\lambda(x_1, y_1) = (|\lambda x_1|, |\lambda y_1|)$.

(1) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ $\quad \forall v_1, v_2 \in V$

(2) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ $\quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$

(3) $\exists \vec{0}_v \in V$ t.q. $\vec{0}_v + v = v$ $\quad \forall v \in V$

neutro de la suma

(Para cada)

(4) $\forall v \in V, \exists w \in V$ t.q. $v + w = \vec{0}_v$

(5) $1 \cdot v = v$ $\quad \forall v \in V$

(6) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

(7) $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V$

(8) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

(1)

a) $(x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (3y_2 + 3y_1, -x_2 - x_1)$
$= (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2)$

(5) $\underset{\lambda}{1} \cdot v \overset{?}{=} v$

$1 \cdot (x_1, y_1) = (3y_1, x_1) \neq \Rightarrow$ contraejemplo.

b) $\underbrace{(x_2, y_2) + (x_1, y_1)}_{=(x_1, y_1) + (x_2, y_2)} = (x_1 + x_2, 0)$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0),$$

¿$\exists \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$? $\cdot (x_1, y_1) + \underbrace{(a, b)}_{\text{fijo} \to 0_V} \overset{?}{=} (x_1, y_1) \quad \forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

contraejemplo prop (3)

· Por otro lado uso la suma de letras:

$(x_1, y_1) + (a, b) = (x_1 + a, 0)$

↯ Absurdo $\nexists$ neutro.

Consultas:

3. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

   a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es igual a $\pi/4$, $\|u\| = 3$ y que $u - v$ es perpendicular a u.
   b) Hallar $\|v\|$ y $\|u + v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\pi/4$, que $\|u\| = 3$ y que el ángulo entre $u + v$ y u es igual a $\pi/6$.
   c) ¿Es cierto que si v es un vector no nulo entonces la igualdad $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle$ implica $u = w$? ¿Qué puede decirse de $u - w$?

b) Incógnitas: $\|v\|$ y $\|u+v\|$

$\langle u, v\rangle = \underbrace{\|u\|}_{3} \|v\| \underbrace{\cos(\pi/4)}_{1/\sqrt{2}}$

$\langle u+v, u\rangle = \|u+v\| \, \|u\| \cos(\pi/6)$

$\begin{cases} \langle u, v\rangle = \|v\| \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \langle u, v\rangle = \|u+v\| \dfrac{\sqrt{27}}{2} - 9 \end{cases}$

$\Rightarrow \|v\| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\left[\|u+v\| \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 9\right]$

Relación entre incógnitas

$$\underbrace{\langle u+v, u\rangle}_{\underbrace{\langle u,u\rangle}_{\|u\|^2 = 9} + \langle v,u\rangle} = \underbrace{\|u+v\|}\,\underbrace{\|u\|}_{3}\,\underbrace{\cos(\pi/6)}_{\sqrt{3}/2} \Rightarrow \langle u,v\rangle = \underbrace{\|u+v\|}_{Y}\frac{\sqrt{27}}{2} - 9$$

Relación entre incógnitas

$$\boxed{\underbrace{\|v\|}_{X} = \underbrace{\|u+v\|}_{Y}\sqrt{3/2} - 3\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\langle u+v, u+v\rangle} = \sqrt{\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2}$$

$$= \sqrt{9 + 2\left[\|v\|\frac{3}{\sqrt{2}}\right] + \|v\|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|v\| = \sqrt{9 + 3\sqrt{2}\|v\| + \|v\|^2}\sqrt{3/2} - 3\sqrt{2}}$$