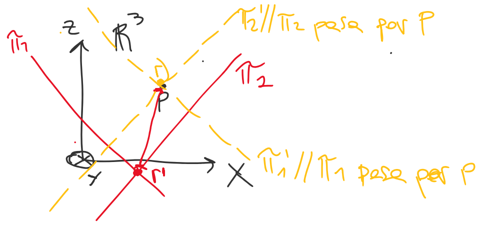
6. Hallar ecuaciones paramétricas de la recta que no corta a ninguno de los planos de ecuaciones

$\underbrace{x+y+z=1}_{\pi_1}, \quad \underbrace{x-y=3}_{\pi_2},$

y que pasa por el punto $\overbrace{(10,11,12)}^{P}$.



¿$\tilde{\pi}_1$? Tomo $x+y+z=\alpha \Rightarrow$ Va a ser un plano paralelo
(Va a tener los mismos vectores directores)

Pasa por $P=(10,11,12) \longrightarrow \alpha = 33$

$\Rightarrow x+y+z=33$

¿$\tilde{\pi}_2$? $x-y=-1$

$\Rightarrow r \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$ ← Reducida

$$\left(\begin{array}{l} z=\lambda \\ y=\mu \\ \Rightarrow x=\alpha-\lambda-\mu \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\lambda + \mu\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{vectores directores}} \end{array} \right)$$

Producto escalar / interno

Def.: Sea $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$\langle u, v\rangle \overset{\text{def.}}{=} u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$

↑ p. escalar ↑ ángulo entre ellos

obs.: Tmb. puedo realizar el prod. escalar así:

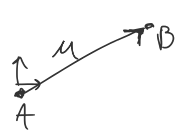
$\langle (u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

prop.:

$\left.\begin{array}{l} \text{① } \langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \\ \text{② } \langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \\ \text{③ } \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$

④ $\langle u,u\rangle \geq 0$ y $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

def.: $\|u\| = d(A,B)$



Obs.: • La norma (en $\mathbb{R}^3$) la vamos a calcular como:

$\|(u_1,u_2,u_3)\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

$\|(u_1,u_2,u_3)\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

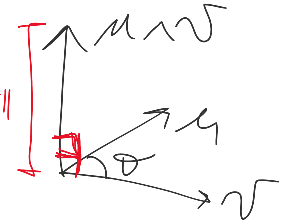
Obs.: $\|u\| = \sqrt{<u,u>}$

prop.: • $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\| \quad \alpha\in\mathbb{R}$

• $\|u\|\geq 0$ y $\|u\|=0 \iff u=0$

• $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

Def.: Sea $u,v\in\mathbb{R}^3$, el producto vectorial $u\wedge v$ es un vector de $\mathbb{R}^3$:



(1) $\|u\wedge v\| = \|u\|\,\|v\|\operatorname{sen}\theta$

(2) $<u\wedge v, u> = <u\wedge v, v> = 0$

($u\wedge v$ es perpend. al plano de u y v)

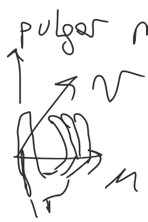
$<\vec{A},\vec{B}> = 0 \iff \vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales ($90°$)

($\cos(90°)=0$)

(3) $\{u, v, u\wedge v\}$ está orientado positivamente

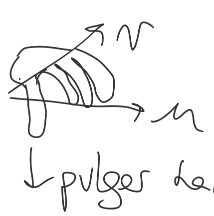
(Regla de la mano derecha)

$u\wedge v$:



• Dedos van de u hacia v (caso $u\wedge v$)

$v\wedge u$:



• Dedos van de v hacia u

Otra forma de calcularlo:

$\in\mathbb{R}^3$

Otra forma de calcularlo:

$$u=(u_1,u_2,u_3) \longrightarrow u = \overbrace{u_1}^{\in\mathbb{R}}\hat{\imath} + \overbrace{u_2}^{\in\mathbb{R}}\hat{\jmath} + \overbrace{u_3}^{\in\mathbb{R}}\hat{k} \in \mathbb{R}^3$$

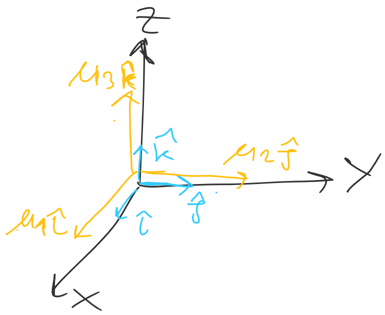
$$v=(v_1,v_2,v_3) \longrightarrow v = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$$

¿$u\wedge v$?

$\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$: versores (de módulo unitario)

$\|\hat{\imath}\| = \|\hat{\jmath}\| = \|\hat{k}\| = 1$

$\|\underbrace{u_1}_{\alpha}\hat{\imath}\| = |u_1|\underbrace{\|\hat{\imath}\|}_{=1} = |u_1|$



$$\overbrace{u\wedge v}^{\in\mathbb{R}^3} = \left(\overbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}^{\hat{\imath}}, -\overbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}^{\hat{\jmath}}, \overbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}^{\hat{k}} \right) = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

1. Producto escalar y producto vectorial

1. Dados los vectores $u = (2,-1,7)$, $v = (1,1,-3)$ y $w = (1,-1,2)$ calcular:

   a) $\|u\|$, $\|v\|$, $\langle u,v\rangle$, $u\wedge v$, $\|u\wedge v\|$.

   b) $u\wedge(v\wedge w)$ y $(u\wedge v)\wedge w$. Observar que el producto vectorial no es asociativo.

a) $\|u\| = \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(7)^2} = \sqrt{54}$

$\|v\| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(-3)^2} = \sqrt{11}$

$\langle u,v\rangle = \langle (2,-1,7),(1,1,-3)\rangle = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 7\cdot(-3)$

$= -20$

$$(\overset{\hat{\imath}}{2},\overset{\hat{\jmath}}{-1},\overset{\hat{k}}{7})\wedge(1,1,-3) = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - (-13)\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$((-4, 13, -5))$$

$$\|u \wedge v\| \xrightarrow{1^{\circ}} \sqrt{(-4)^2 + (13)^2 + (-5)^2} = 16 + 169 + 25 = 210$$

$$\xrightarrow{2^{\circ}} \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta \rightarrow$$ No conviene en este caso porque debería saber el ángulo θ por letra o hallarlo de otra manera

Despejar de:

$$\langle u, v \rangle = \underbrace{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}_{\checkmark} = \underbrace{\|u\|}_{\checkmark} \underbrace{\|v\|}_{\checkmark} \cos\theta$$

Despejo θ.

2. **Productos notables.**

Sean x e y vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Demostrar que se satisfacen las igualdades

a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

b) $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

c) **Regla del paralelogramo.** $\frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Recomendación: Expresar todo en P.I.s. y luego usar prop. del P.I.

a) Izq.: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2} + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|x\|^2}$

me paso a P.I.

prop. del P.I.

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

Idem b) y c)

3. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es igual a $\pi/4$, $\|u\| = 3$ y que $u - v$ es perpendicular a u.

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle u,v\rangle \Rightarrow \underbrace{\|u\|}_{3\ (1)}\|v\|\underbrace{\cos\theta_{u,v}}_{\pi/4\ (2)} \\ \Rightarrow \cancel{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3} \\ \text{no me sirve} \end{array}}$$

$$\boxed{\cos\underbrace{\theta}_{\pi/4} = 1/\sqrt{2}}$$

(3) $\langle u-v, u\rangle = 0 \iff \langle u,u\rangle - \langle v,u\rangle = 0$

perpendiculares

$\langle u,u\rangle = \|u\|^2$

$$\iff 9 - (\|v\|\|u\|\cos\theta_{u,v}) = 0$$

(2)

$$\iff 9 - \frac{3}{\sqrt{2}}\|v\| = 0$$

$$\iff \|v\| = \frac{9}{3}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

4. Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^3$, hallar:

a) todos los vectores w para los que se satisface $u \wedge w = u \wedge v$.

b) todos los vectores w para los que se satisface $\langle u, w\rangle = \langle u, v\rangle$.

= módulo $\rightarrow \cancel{\|u\|}\|v\| \operatorname{sen}\theta_1 = \cancel{\|u\|}\|w\| \operatorname{sen}\theta_2$

= sentido

= dirección

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\|w\|}_{\text{elegir}} = \frac{\|v\| \operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\underbrace{\theta_2}_{\text{elegir}}}}$$