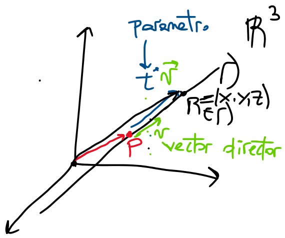
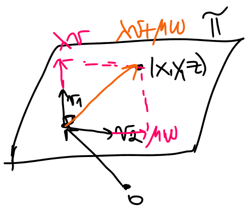


$$r):\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}}_{\vec{P}}+t\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$$

$$r):\begin{cases}x=p_1+tv_1\\y=p_2+tv_2\\z=p_3+tv_3\end{cases}$$ ← Paramétrica



λ, μ son parámetros

v, w son vectores directores

Plano

$$\pi):\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}$$ ← Paramétrica

$$r):\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases}$$ ← reducida

$$\pi):\ ax+by+cz=d$$ ← Reducida

1. Hallar ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas (o reducidas) de las siguientes rectas:
   a) la que pasa por el punto $P=(1,2,5)$, con vector director $v=(2,1,3)$;
   b) la que pasa por los puntos $A=(4,3,0)$ y $B=(1,0,1)$.

a) $r):\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\vec{P}+t\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=5+3t\end{cases}$ ← Paramétrica

($\vec{P}$: pto. de ref.; t: parámetro; $\vec{v}$: director)

Reducida

$\Rightarrow F_1-2F_2:\ x-2y=1-4+\cancel{0t}$

$3F_1-2F_3:\ 3x-2z=3-10+\cancel{0t}$

$$r):\begin{cases}x-2y=-3\\3x-2z=-7\end{cases}$$

Obs.: • 2 ptos definen a una única recta.

• 3 ptos. definen a un único plano. → $\underline{a}x+\underline{b}y+\underline{c}z=d$

a, b y c definen al plano

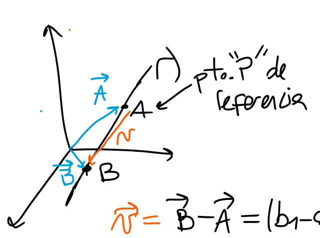
⇒ 3 G.L. de libertad

⇒ 3 ptos. resuelve el problema.

$$\begin{cases}ax_1+by_1+cz_1=d\\ax_2+by_2+cz_2=d\\ax_3+by_3+cz_3=d\end{cases}$$ ⇒ sistema 3x3 y hallo a, b y c

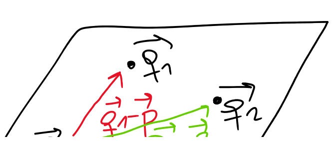
$A=(a_1,a_2,a_3)$

b)

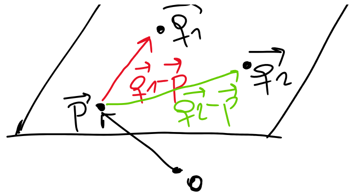


$$\begin{cases}x=a_1+\lambda(b_1-a_1)=4+\lambda(1-4)\\y=a_2+\lambda(b_2-a_2)=3+\lambda(0-3)\\z=a_3+\lambda(b_3-a_3)=0+\lambda(1-0)\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}4\\3\\0\end{bmatrix}+\lambda\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\3\\0\end{bmatrix}\right)=\vec{A}+\lambda(\vec{B}-\vec{A})$$

$\vec{v}=\vec{B}-\vec{A}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3+a_3)$



$$\pi):\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\vec{p}+\lambda(\vec{q}_1-\vec{p})+\mu(\vec{q}_2-\vec{p})$$



$\pi): \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{p} + \lambda(\vec{q}_1 - \vec{p}) + \mu(\vec{q}_2 - \vec{p})$

2. Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de los siguientes planos:

a) el que pasa por el punto $(1,1,1)$ y tiene a $(2,-1,1)$ y $(1,0,-1)$ como vectores directores;

b) el que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(2,2,3)$ y $(1,1,-2)$;

c) el que pasa por el punto $(1,1,1)$ y contiene a la recta dada por $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ x-y-z-2=0. \end{cases}$

a) $\pi)$:
$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda 2 + \mu(1) \\ y &= 1 + \lambda(-1) + \mu(0) \\ z &= 1 + \lambda(1) + \mu(-1) \end{aligned}$$
← Paramétrica

¿Reducida? Matriz ampliada:

$$\begin{array}{ccc} \cdot\lambda & \cdot\mu & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \vec{p} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & -1 & z-1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Escalonizo}} \xrightarrow{F_3+F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 3 & 0 & x+z-2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3+3F_2} \begin{array}{cc} \cdot\lambda & \cdot\mu \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 0 & 0 & \underbrace{x+3y+z-3-2}_{=0} \end{array}\right]$$

(Sist. compatible $\Leftrightarrow \exists$ plano)

$\Rightarrow \boxed{x+3y+z=5}$ ← condición de compatibilidad (ec. del plano)

$r)$:
$$\begin{aligned} x &= p_1 + t v_1 \\ y &= p_2 + t v_2 \\ z &= p_3 + t v_3 \end{aligned} \rightarrow \begin{array}{c} \cdot t \end{array} \left[\begin{array}{c|c} v_1 & x-p_1 \\ v_2 & y-p_2 \\ v_3 & z-p_3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Escalonizo}} \left[\begin{array}{c|c} v_1 & x-p_1 \\ 0 & \underbrace{\quad}_{ec.1=0} \\ 0 & \underbrace{\quad}_{ec.2=0} \end{array}\right]$$

c) el que pasa por el punto $\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{P} \text{ es pto. ref.}}$ y contiene a la recta dada por $r) \begin{cases} x+y+z+2=0, \\ x-y-z-2=0. \end{cases}$ Elijo $\vec{q}_1 \in r)$

⇓ Reduzco

Sumando: $\{ \cancel{x}+x+z+2=0 \nearrow y=-2-z$

$F_1+F_2 \Leftrightarrow F_2$ ... $\Rightarrow \{(0,-2-z,z)\}$ ...

r es pl?o lef?

Reduzco

sumando: $F_2+F_1 \leftrightarrow F_2$ $\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x=0 \;(x=0) \end{cases} \Rightarrow y=-2-z \Rightarrow \{(0,-2-z,z)\}$ r

$\begin{cases} (0,-2,\underbrace{0}_{z=0}) = \vec{q}_1 \\ (0,-3,\underbrace{1}_{z=1}) = \vec{q}_2 \end{cases}$

Directores: $\vec{q}_1-\vec{p}$

$\vec{q}_2-\vec{p}$

π: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{p} + \lambda(\vec{q}_1-\vec{p}) + \mu(\vec{q}_2-\vec{p})$ ↙ Paramétrica.

4. Hallar la intersección de los siguientes planos:

$2x-3y+4z=-2$, π_1 $\quad \begin{cases} x = 2-\lambda+\mu, \\ y = -1-\lambda+2\mu, \\ z = -2-2\lambda-\mu. \end{cases}$ π_2

1º Camino: Escribo las 2 paramétricas

π_1) $\begin{array}{l} x = p_1+\lambda v_1+\mu w_1 \\ y = p_2+\lambda v_2+\mu w_2 \\ z = p_3+\lambda v_3+\mu w_3 \end{array}$ $\quad \pi_2$)......

igualo $\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=z \end{array}$ $\Rightarrow$ llegar a r: $\begin{array}{l} x = p_1+\lambda v_1 \\ y = p_2+\lambda v_2 \\ z = p_3+\lambda v_3 \end{array}$

2º Camino: Escribo las 2 implícitas.

Reducida a → paramétrica

$2x-3y+4z=-2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y}{2} - \frac{4z}{2} - \frac{2}{2} \\ y=y \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{y}_{=\lambda} \overbrace{\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\text{Director 1}} + \underbrace{z}_{=\mu} \overbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\text{Director}} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\{(3/2\,y-2z-1, y, z)\}$

$(3/2,1,0)\cdot y$ D_1

$+(-2,0,1)\cdot z$ D_2

$+(-1,0,0) = \vec{p}$

Paramétrica → $\begin{cases} x = -1+3/2\,\lambda-2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$