4. Sean $A, B \in M_{n\times n}$, tales que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\det(-AB)$ *b)* $\det(A^2)$ *c)* $\det(B^{-1}A)$ *d)* $\det(2A)$ *e)* $\det(3B^T)$ *f)* $\det(AA^T)$

$3^n|B^t| = 3^n\overset{(-2)}{|B|}$

$(-1)^n(3)(-2) = \underbrace{(-1)^n(-1)}_{(-1)^{n+1}}\cdot 6$

$= 2^n(3)$

$= 3^n(-2)$

① $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

② $|\alpha A| = \alpha^n|A|$

a) $\det(\underbrace{-A\cdot B}_{M}) = (-1)^n\det(A\cdot B) = (-1)^n\det(A)\cdot\det(B)$ ②, ①

(Ejemplo $M_{6\times 6}$)
→ n es par $= |A||B| = -6$

→ n es impar $= -|A||B| = 6$
(Ejemplo $M_{7\times 7}$)

$$\begin{bmatrix} -(F_1 \dots) \\ -(F_2 \dots) \\ \vdots \\ -(F_n \dots) \end{bmatrix}$$

f) $|AA^t| = |A||A^t| = |A|^2 = 3^2 = 9$ ①

Prop.: $|A| = |A^t|$

3. Calcule el determinante de las siguientes matrices y determine para cuáles valores de k son invertibles.

a) $\begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 2 \\ 3 & 3 & k-1 \end{pmatrix}$. → $a_3k^3 + a_2k^2 + a_1k + a_0 = 0$

Prop.: - Si $A \in M_{n\times n}$ contiene alguna fila de ceros ⇒ $|A| = 0$

- Si $A \in M_{n\times n}$ " " " c.L. del resto de filas ⇒ $|A| = 0$

- $A \in M_{n\times n}$, $|A| = 0$ ⟺ A no es invertible.

Ejercicio ⇒ Hallo $\det_M(k) = \underbrace{F(k) = 0}_{\text{ecuación de 3º grado (polinomio)}}$ ⇒ valores de k para los cuales no es invertible

$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \mathbb{R}$

$Sol = I = (-\infty, k_1) \cup (k_1, k_2) \cup (k_2, k_3) \cup (k_3, +\infty)$

5. Calcular los determinantes

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

para $n = 2, 3, \ldots$, donde se supone que la matriz con determinante d_n tiene n filas y n columnas.

Escalerizar ⇒ No modifico el determinante ⇒ obtengo matriz triangular: $M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ⇒ $\det(M) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Prop. de matriz triangular

$|M| = \underbrace{(1)}_{(-1)(-1)}\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$

$$1 = \underbrace{0+1+1+1+\ldots+1}_{n-1} = n-1$$

2. Regla de Cramer

2. Considere $a \in \mathbb{R}$ y las matrices T y b dadas por

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & a^2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2a \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar todos los valores de a para los que el sistema $TX = b$ tiene infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & a^2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = \frac{|T_{c_i \leftrightarrow b}|}{|T|} = \frac{\left|\begin{bmatrix} c_1 - \overset{\overset{b}{\updownarrow}}{c_i} - c_n \end{bmatrix}\right|}{\underbrace{\left|\begin{bmatrix} c_1 - c_i - c_n \end{bmatrix}\right|}_{\neq 0}} \Rightarrow \text{Hallar } x_1, x_2, x_3. \text{ (solución única)}$$

Si $|T| \neq 0 \Rightarrow T$ es matriz invertible $\Rightarrow$ compatible y determinado

$\Rightarrow$ Hallar α t.q. $|T| = 0 \longrightarrow$ Incompatible

$\longrightarrow$ Comp. Indeter.

$$|T| = 2\cdot 5\cdot 2 + (-2)\cdot 4\cdot 3 + \cancel{3\alpha^2\cdot 0} - [0 - 12 + 8\alpha^2]$$

$$= 20 - 24 + 12 - 8\alpha^2$$

$$= +8 - 8\alpha^2 = 0 \Rightarrow \quad 1 = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\pm 1 = \alpha} \to \text{Incompatible?} \quad \to \text{Comp. indeterm.?}$$

$\Rightarrow$ Escalerizo $\xrightarrow{\alpha=1}$ Si no es incompatible $\Rightarrow$ Es comp. indet. ✓

$\xrightarrow{\alpha=-1}$ Si no es incompat. $\Rightarrow$ " " (infinitas soluciones) ✓