3. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Hallar matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_2 E_1 A = I$.
b) Hallar A^{-1}.
c) Expresar A como el producto de matrices elementales.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{T_1: F_2 \longleftrightarrow F_2 - 3F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{T_2: F_2 \longleftrightarrow F_2/4}$$

$Ax = I$

$E_1 = T_1(Id)$

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_2 - 3F_1} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = E_1}$$

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\Rightarrow \underbrace{E_2 \underbrace{E_1 A}_{T_1(A)}}_{T_2(T_1(A))} = I \qquad \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} A = I$$

c) Despejo A: $E_2 E_1 A = I$

$$\boxed{A = \underbrace{E_1^{-1}}_{T_1^{-1}} \underbrace{E_2^{-1}}_{T_2^{-1}}} \cancel{I}$$

E_1^{-1}: Está asociada a la inversa de T_1, osea, T_1^{-1}

E_2^{-1}: " " a T_2^{-1}

$\Rightarrow E_1^{-1}$: $F_2 \longleftrightarrow F_2 + 3F_1$ $\qquad E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

E_2^{-1}: $F_2 \longleftrightarrow 4F_2$

$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$E_2: F_2 \longleftrightarrow 4F_2$

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Si invierto E_1:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow 3F_1 + F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix}}_{E_1^{-1}}$$

b) Determine el rango de las siguientes matrices

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ \cancel{\sqrt{2}} & \cancel{\sqrt{2}} & \cancel{\sqrt{2}} & \cancel{\sqrt{2}} & \cancel{\sqrt{2}} & \cancel{\sqrt{2}} & \cancel{\sqrt{2}} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow F_1 \\ \\ \\ \\ F_4 = 4F_1 \\ \nwarrow F_6 \end{matrix}$

Rango: # de escalones de la matriz escalerizada.

Obs.: Puedo verlo como cantidad de filas linealmente independientes (que no sea C.L. de las otras)

$rg(C) = 2 \longrightarrow 2$ escalones

b) Recomiendo escalerizar

Práctico 4: Determinantes

Def.: Sea $A \in M_{n \times n}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Dado a_{ij}, le llamamos matriz adjunta de la entrada a_{ij}, a la Matriz A^*_{ij} (← adjunta) resultante de cancelar la fila i y la columna j de A.

ej.: $A = \begin{array}{c} \\ F_1 \end{array} \begin{pmatrix} \overset{C_1}{a_{11}} & \overset{C_2}{a_{12}} & \overset{C_3}{a_{13}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^*_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \end{bmatrix}$

ej:

$$A=\begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3} \end{array} \Rightarrow A^*_{22}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Def.:

$n=1 \Rightarrow A_{1\times 1}=(a) \Rightarrow |A|=a \quad (\det(A))$

$n=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=ad-cb$

$$n=3 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} & \overset{-}{a_{23}} \\ \overset{+}{a_{31}} & \overset{-}{a_{32}} & \overset{+}{a_{33}} \end{pmatrix}_{\underset{3\ \ 3}{n\times n}} \Rightarrow |A|=\sum_{i=1}^{n=3}(-1)^{\overbrace{1+i}^{\text{par o impar}}} a_{i1}\,|\overset{\text{adjunta}}{A^*_{i1}}|$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}|A^*_{11}|+(-1)^{1+2}a_{21}|A^*_{21}|+(-1)^{1+3}a_{31}|A^*_{31}|$$