Práctico 3:

Def.: $A \in M_{n\times n}$ es invertible si $\exists A^{-1} \in M_{n\times n} / A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Obs.: Una matriz conmuta con su inversa (si existe)

Prop.: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

¿Cómo hallo la inversa?

$A \underbrace{X}_{=A^{-1}} = B$ ← matriz $= I_n$ ⇒ Matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots 1 \end{array}\right]$$

Escalerizar → hasta obtener la identidad del lado izquierdo (si es invertible)

Si no es invertible ⇒ No hay solución → Hay alguna fila de ceros en la matriz

→ Hay alguna fila que es comb. lineal de otra → Por ejemplo 2x2 una fila es multiplo de otra.

(Genero una fila de ceros)

{ Det = 0 (ver luego)
{ $R < n$

1. Matrices invertibles

1. Determinar si las siguientes matrices son invertibles, y en caso de serlo calcular la inversa de la matriz.

a) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Invertible (Filas no son C.L.) ? ?

$1 - 5(2) = -9$

$7F_1 - 5F_2$

Invertible (Filas no son c.l.).

$1-5(2)=-9$

a) $\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2F_1+3F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1-5F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

$2(-5)+3(3)=-1$

$\xrightarrow[F_2/-1]{F_1/-3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right]$ Inversa.

Chequeo:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \checkmark$$

2. Las siguientes matrices son invertibles:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boxed{B=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

a) Calcular las inversas.

b) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando los cálculos de la parte anterior:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) a) $B \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow -F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[F_3-6F_1]{F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & +6 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+2F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow[F_2+F_3]{F_1+F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Inversa $= B^{-1}$

b) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando los cálculos de la parte anterior: ← Inversas

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Sistema: $B\mathbf{x} = b$ ← vector resultado

Matriz, vector incógnita

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

Puedo 'despejar la x' (Resolver el sistema)

$$\underbrace{\cancel{B^{-1}}(\cancel{B}}_{I}x) = B^{-1}(b)$$

$$\boxed{x_{sol} = \underbrace{B^{-1}}_{\text{conocido}} b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 \\ 4+3 \\ 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\left(4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

$\boxed{\text{obs.: } I \cdot M = M}$

obs.: $Bx = b$

paso para derecha

$x = \underbrace{B^{-1}}_{\text{Izq.}} b$

3. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Hallar matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_2E_1A = I$.

b) Hallar A^{-1}.

c) Expresar A como el producto de matrices elementales.

Matriz elemental: E_T, está asociada a una transformación elemental

Matriz elemental: E_T, está asociada a una transformación elemental aplicada a la matriz identidad.

$$E_T = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transf. elemental}}}{T}(I_n)$$

Ejemplo: $\underset{(F_i \longleftrightarrow F_j)}{E_{T_1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T_1(A) = T_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

T_1 asociada a intercambiar filas

3) e)

A^{-1}

$E_2E_1A = I.$

$E_2 E_1 = A^{-1}$ por def. $\Rightarrow$ Invertir y representar las transf. elementales realizadas cada una en su matriz asociada

1° Transf. que le aplico a la $I_{2\times 2}$

2° Transf.

$$E_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

suma de filas

$(F_1 \longleftrightarrow F_1 + F_2)$

$$\underset{F_3 \longleftrightarrow 8F_1 + F_3}{E_T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$