lunes, 28 de agosto de 2023 18:14

3. Geometría

En los ejercicios de esta sección los puntos del plano se representarán como matrices 2×1. Por ejemplo el punto $(1,3)$ se representará como $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}^t$ y a veces también como $(1,3)^t$.

1. **Matriz de la simetría respecto a la recta $x = y$.**
   Sea $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$S\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}. \qquad S^{-1} = S = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

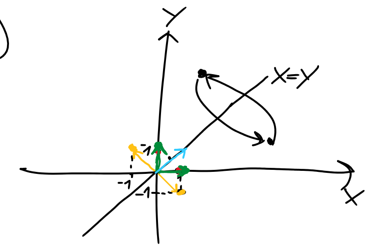
   a) Representar en el plano los siguientes puntos $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^t$ y $\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$, y sus respectivas imágenes por la función S. Para estos puntos dibujar un flecha entre p y $S(p)$. Interpretar geométricamente.

   b) Bosquejar las siguientes figuras y sus imágenes por S.

   a) $x = 5$ b) $x + y = 0$ c) $x - y = 0$ d) $x - y = 2$

   c) Probar que la función S es biyectiva y calcular su inversa.

a)



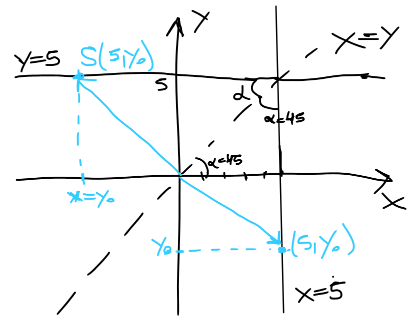
$$S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

b)



a) $x=5$ $A = \{(5,y)\}$

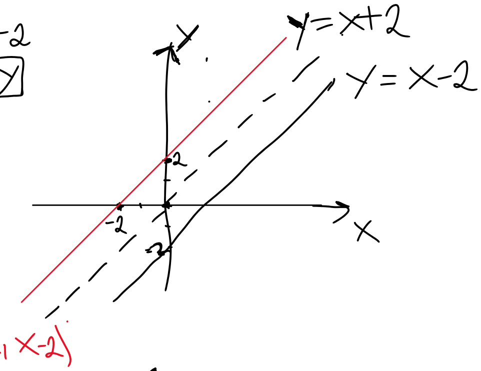
$$S\begin{pmatrix}5\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_0\\5\end{pmatrix} \begin{matrix}=x\\=y\end{matrix}$$

$\boxed{x_0 - y_0 = 2}$

multiplicar $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

d) $x_0 - 2 = y_0$ $\{(x_0, x_0 - 2)\} \xrightarrow{S} (\underbrace{x_0 - 2}_{\text{eje hor}}, \underbrace{x_0}_{\text{eje vert}})$ $\begin{matrix} X & Y \end{matrix}$

$\boxed{y = x_0}$ C.D.V. $\xrightarrow{\text{sust.}}$ $x = y - 2$ $\boxed{x + 2 = y}$



c) $S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \begin{matrix}=x\\=y\end{matrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \begin{matrix}=u\\=v\end{matrix}$

$f(x) = x + 2$

$y = x + 2$

$x = y + 2 \rightarrow x - 2 = y = f^{-1}(x)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Despejes $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ del sistema de ecuaciones

$$① \begin{cases} x = \cancel{a_{11}u} + a_{12}v & a_{11} = 0,\ a_{12} = 1 \\ y = a_{21}u + \cancel{a_{22}v} & a_{21} = 1,\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\begin{matrix} x = v \\ y = u \end{matrix}\Big\}$ resultados de aplicar $S^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u = y\\v = x\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ A^{-1} $\rightarrow$ Solución

$$A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{A^{-1}A}_{I}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{A^{-1}A}_{I}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}$$

$$A^{-1} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

S^{-1} es una simetría respecto a $x=y$
$(S^{-1} = S)$

2. **Matriz de giro de ángulo θ.**

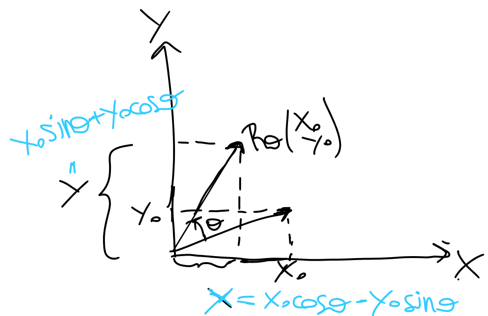
Para un número $\theta \in [0, 2\pi)$ se considera la matriz $G_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, y se define la función $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante la fórmula

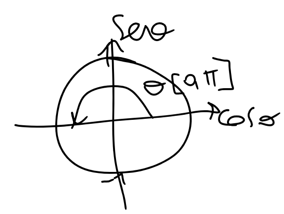
$$R_\theta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = G_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2

a) Calcular para $(1,0)^t$ y $(0,1)^t$ sus imágenes al aplicar R_θ e interpretar geométricamente el resultado (Sugerencia: bosquejar en el plano los puntos y sus imágenes).

$$R_\theta\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos\theta - y_0\sin\theta \\ x_0\sin\theta + y_0\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$





$R_\theta\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$: Vector girado θ en sentido antihorario. (con igual módulo)

Dem.: $¿\underbrace{\|(x_0,y_0)\|^2}_{x_0^2+y_0^2} = \|R_\theta(x_0,y_0)\|^2?$

$$x_0^2 + y_0^2 \overset{?}{=} \underbrace{\|(x_0\cos\theta - y_0\sin\theta, x_0\sin\theta + y_0\cos\theta)\|}$$

$$= (x_0\cos\theta - y_0\sin\theta)^2 + (x_0\sin\theta + y_0\cos\theta)^2$$

$$= x_0^2\cos^2\theta + y_0^2\sin^2\theta \cancel{- 2x_0y_0\cos\theta\sin\theta}$$

$$+ x_0^2\sin^2\theta + y_0^2\cos^2\theta \cancel{+ 2x_0y_0\sin\theta\cos\theta}$$

$$= x_0^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} + y_0^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1}$$ ← Id. trigonométrica

$$= \underbrace{x_0^2 + y_0^2}$$

$\|(x_0,y_0)\|^2 = \|R_\theta(x_0,y_0)\|^2 \Rightarrow$ No modifica el módulo

$$\|(x_0,y_0)\|^2 = \|\underbrace{R_\theta(x_0,y_0)}_{= x_0 + y_0}\|^2 \Rightarrow$$ No modifica el módulo de la preimagen.