3. Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones: AB, BC, $B+B^t$, AA^t, A^tA, $(AB)C$, $A(BC)$ y $DE-ED$.

$1-2+0=-1$

$-1+4+3=6$

$-2+8+6=12$

$2-4+0=-2$

$1-6-6=-11$

$-1+4+3=6$

$1-2+0=-1$

$$DE=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ED

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad \begin{array}{c|c|c}-11&6&-1\\ \hline -22&12&-2\\ \hline -11&6&-1\end{array}$$

Obs.: $DE \neq ED$

$$DE-ED=\begin{bmatrix}11&-6&1\\22&-12&2\\11&-6&1\end{bmatrix}$$

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si la primera y tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y tercera columna de AB;

$$(AB)_{i1}=\sum_j A_{ij}\,B_{j1}$$

$$(AB)_{i3}=\sum_j A_{ij}\,B_{j3}$$

$$AB=\begin{bmatrix}C_1&C_2&C_3&\cdots\end{bmatrix}$$

F_i

$$¿(AB)_{i1}=(AB)_{i3}\ \forall i?$$

$$\Longleftrightarrow \sum_j \underbrace{A_{ij}}_{=}\,B_{j1}=\sum_j \underbrace{A_{ij}}_{=}\,B_{j3}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{B_{j1} = B_{j3}}_{\text{Verdadero por hipótesis.}} \quad \forall j$$

$\blacksquare$

(2) Multiplicación de matrices como combinaciones lineales de las columnas:

$$AB \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{2\times 2} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 a_{11} + b_2 a_{12} \\ b_1 a_{21} + b_2 a_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{2\times 2}$$

Hago combinaciones lineales de las columnas de la matriz de la izquierda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}}_{3\times 2} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ | & | \end{bmatrix}}_{3\times 2} \Rightarrow C_1 = b_{11} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + b_{21} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$C_2 = b_{12} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + b_{22} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

Volviendo al ejercicio 5)a).

Si dos columnas de B son iguales, las mismas columnas (en posición) del resultado del producto serán iguales.

$(b_{11} = b_{12}$ y $b_{21} = b_{22})$ $\Rightarrow$ Entonces $C_1 = C$

3

Multiplicación de matrices como combinaciones lineales de las filas:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \\
AB & \\
\hline
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2} & \begin{bmatrix} F_1 \text{———} \\ F_2 \text{———} \\ F_3 \text{———} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow F_1 = a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} b_{21}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$F_2 = a_{21}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} b_{21}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$F_3 = a_{31}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} + a_{32}\begin{bmatrix} b_{21}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Si dos filas de A son iguales, las mismas filas (en posición) del resultado del producto serán iguales.