Práctico 2: Álgebra de matrices

Def.: Sea $A, B \in M_{m\times n}$, $A = ((a_{ij}))$, $B = ((b_{ij}))$

$+ : M_{m\times n} \times M_{m\times n} \longrightarrow M_{m\times n}$

$A + B = C = ((c_{ij}))$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

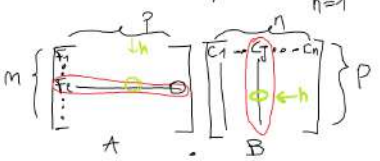
Def.: Sea $A = ((a_{ij})) \in M_{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda A = ((\lambda a_{ij}))$ $\qquad \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$

Def.: Sea $A = ((a_{ij})) \in M_{m\times p}$, $B = ((b_{ij})) \in M_{p\times n}$

$\cdot : M_{m\times p} \times M_{p\times n} \longrightarrow M_{m\times n}$

$A \cdot B = C = ((c_{ij}))$, $\quad c_{ij} = \sum_{h=1}^{h=p} a_{ih} b_{hj}$



Def.: Sea $B = ((b_{ij}))$

$B^t = ((b^t_{ij}))$ donde $b^t_{ij} = b_{ji}$

matriz traspuesta

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ 3 columnas

Intercambiar

Si $i = j$ (Diagonal) Quedan iguales

$b^t_{12} = b_{21}$ $\qquad B^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$b^t_{21} = b_{12}$

b^t_{31}

Ejemplo 2: $C \in M_{1\times 5}$ $\quad C = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$

$C^t \in M_{5\times 1}$ $\quad C^t = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^t$

$C^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$

1. Construir las siguientes matrices

a) $A = ((a_{ij})) \in M_{3\times 4}$, $a_{ij} = i + j$ $\qquad$ b) $B = ((b_{ij})) \in M_{3\times 3}$, $b_{ij} = \begin{cases} i & i \le j \\ 0 & i > j \end{cases}$

a)
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$
$\quad$ 1 2 3 4

- $a_{ii} = 2i$

$i = j$

- $a_{ij} = a_{ji} = i + j = j + i$

$i \le 3,\ j \le 3$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ **Obs.:** Matriz triangular

$i > j \Rightarrow$ pongo 0.

2. Consideremos matrices A y B de dimensión 4×5 y matrices C, D y E de dimensiones 5×2, 4×2 y 5×4 respectivamente. Todas las matrices tienen sus entradas en el mismo conjunto numérico. Determine cuáles de las siguientes operaciones están definidas:

$$BA, \quad AC + D, \quad AE + B, \quad AB + B, \quad E(A + B), \quad EAC.$$

En caso de estarlo, indique las dimensiones de la matriz resultante.

Poner las dim. multipl.

$\underset{4\times 5}{B} \cdot \underset{4\times 5}{A} \longrightarrow (4\times 5)\times(4\times 5) \Rightarrow$ No está definido

deberían coincidir y poder "cancelarlo"

Ejemplo:

$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6$ ¿Dim. resultante?

$5\times 2 \quad 2\times 1 \quad 1\times 7 \quad 7\times 10 \quad 10\times 8 \quad 8\times 1$

$\boxed{5\times 1}$

AC+D: $\underbrace{(4\times 5)(5\times 2)}_{4\times 2} + (4\times 2)$ ✓

EAC: $\underbrace{(5\times 4)(4\times 5)(5\times 2)}_{5\times 2}$ ✓

3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones: AB, BC, $B + B^t$, AA^t, A^tA, $(AB)C$, $A(BC)$ y $DE - ED$.

Def.: M es simétrica $\Leftrightarrow M = M^t$ $\quad (((m_{ij})) = ((m_{ji})))$

Ejemplo: $M = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

12

21

Obs.: $\underbrace{\underset{m\times p}{M} \cdot \underset{p\times m}{M^t}}_{m\times m} \Rightarrow \underbrace{M \cdot M^t}_{m\times m}$ es una matriz simétrica

Cuadrada

$M + M^t \Rightarrow M + M^t$ es una matriz simétrica

DE − ED: ¿DE − ED = 0?

Obs.: En matrices rectangulares, un contraejemplo es:

$A \in M_{m\times p}$ $\quad AB = C_{m\times n}$

$B \in M_{p\times n}$ $\quad$ ¿BA? ← No está definida.

$(p\times n)(m\times p)$

$n \ne m$

⇒ ¡El orden de los factores importa!

¿Matrices cuadradas? Están definidas

¿DE = ED? No necesariamente.

$$\begin{array}{c|c} DE & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$m_{ij} = \sum_{h=1}^{h=p=3} d_{ih} e_{hj}$

$m_{11} = d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} + d_{13}e_{31} =$

$h=1 \quad h=2 \quad h=3$

$= 1 - 2 + 3 = 2$

Obs.: $DE = O_3$, pero $D \ne O_3$

$E \ne O_3$