Variables aleatorias discreta

Distribución binomial (Ejercicio 5)

→ tenemos un experimento que da exito con probabilidad p

→ repetimos el experimento n veces y queremos ver cuantas veces sale exito

X variable aleatoria que cuenta la cantidad de exitos en las n repeticiones

$$X \sim Bin(n, p)$$

n: cantidad de veces que repetimos el experimento

p: probabilidad de exito en un experimento

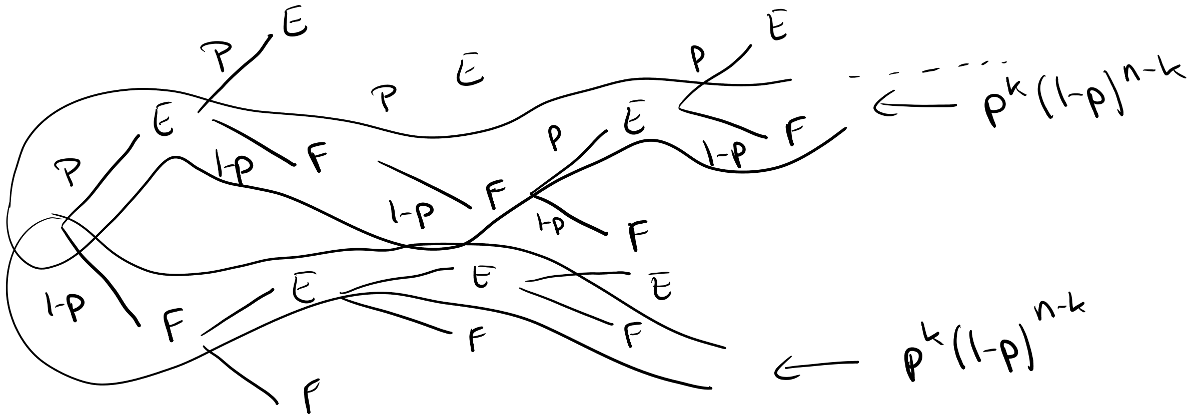
X toma valores en $\{0, 1, \dots, n\}$

sea $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$P_X(k) = P(\underbrace{X = k}_{k \text{ exitos}}) =$$

$$\underbrace{\overset{p}{\underline{E}}\ \ \overset{1-p}{\underline{F}}\ \ \overset{1-p}{\underline{F}}\ \ \overset{p}{\underline{E}}\ \ \overset{1-p}{\underline{F}}\ \ \dots\ \ \overset{1-p}{\underline{F}}}_{n \text{ repeticiones del experimento}}$$

$$p^k (1-p)^{n-k}$$



$$\underbrace{\underline{F}\ \ \underline{E}\ \ \underline{E}\ \ \underline{F}\ \ \cdots\ \ \underline{E}}_{\text{n repeticiones en total entre las cuales nos dio exito k veces}}$$

hay C_k^n formas de elegir las k repeticiones donde esta los exitos

$$p_X(k) = P(X = k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k}$$

veamos que p_X es efectivamente una fpp

hay que verificar:

* $p_X(k) \geq 0$ para todo k ✓
* "$P(X \in \{0, 1, \dots, n\}) = 1$" $\quad \sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1$

$$P(X \in \{0, 1, \dots, n\}) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = n)$$
$$= p_X(0) + p_X(1) + \dots + p_X(n)$$

entonces queremos ver que $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1$$

binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim Bin(n,p) \\ X \text{ toma valores en } \{0,1,\dots,n\} \\ p_X(k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k} \end{array}}$$

2. En la trasmisión de un mensaje compuesto por signos, la probabilidad de que un signo esté equivocado es 0,1. Calcular la probabilidad de que, en un mensaje con 4 signos:

(a) no hayan errores;

(b) ocurra un error;

(c) ocurra no menos de un error

X = cantidad de errores en el mensaje

$X \sim Bin(4, 0{,}1) \rightsquigarrow p_X(k) = C_k^4 (0{,}1)^k (0{,}9)^{4-k}$

a) $P(X=0) = p_X(0) = C_0^4 (0{,}1)^0 (0{,}9)^4 = 0{,}9^4$

b) $P(X=1) = p_X(1) = C_1^4 (0{,}1)^1 (0{,}9)^3$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}9^4$

<u>5.4</u>

el sistema funciona correctamente con probabilidad p

se instalan n sistemas y queremos que la probabilidad de que al menos uno funcione sea mayor o igual que 0,99

X = cantidad de sistemas que funcionan correctamente

$X \sim Bin(n, p)$ $\quad \checkmark\ \times\ \checkmark\ \checkmark\ \_$

$$P_X(k) = C^n_k\, p^k (1-p)^{n-k}$$

queremos n para que $\boxed{P(X \geq 1) \geq 0{,}99}$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - p_X(0) = 1 - \overbrace{C^n_0}^{1}\, \overbrace{p^0}^{1} (1-p)^n = 1-(1-p)^{\boxed{n}}$$

buscamos n para que $\boxed{1-(1-p)^n \geq 0{,}99}$

* si $p = 0{,}9$: $1-(1-0{,}9)^n = 1-(0{,}1)^n \geq 0{,}99 \rightsquigarrow n = 2$ ✓
* si $p = 0{,}8$: $1-(1-0{,}8)^n = 1-(0{,}2)^n \geq 0{,}99 \rightsquigarrow n = 3$ ✓

Distribución hipergeométrica (Ejercicio 7)

D bolillas rojas

N-D bolillas no rojas

caja con N bolillas

sacamos n bolillas de la caja

nos interesa cuantas de las n bolillas son rojas

X variable aleatoria que cuenta la cantidad de bolillas rojas entre las n que sacamos

$X \sim HG(N, D, n)$

N: cantidad de bolillas en la caja

D: cantidad de bolillas rojas

n: cantidad de bolillas que sacamos

Vamos a calcular la fpp de X:

X toma valores en $\{0, 1, \dots, n\}$

sea $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$p_X(k) = P(X = k) = \frac{CF}{CP} = \frac{C^D_k \, C^{N-D}_{n-k}}{C^N_n}$$

$$CP = C^N_n$$

$$CF = C^D_k \, C^{N-D}_{n-k}$$

$\underbrace{\text{k rojas y n-k no rojas}}_{\text{n bolillas}}$

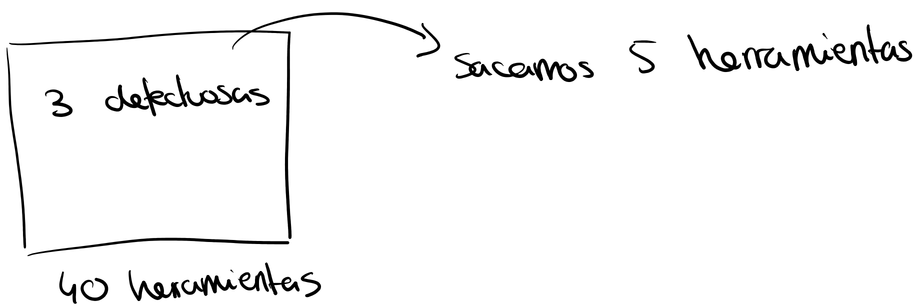
... que p es una fpp hay que ver

para ver que p_X es una fpp hay que ver

* $p_X(k) \geq 0$ ✓
* $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1$

...idad. Sugerencia: Usar que $\sum_{k=0} C_k \, C_{n-k} = C_n$.

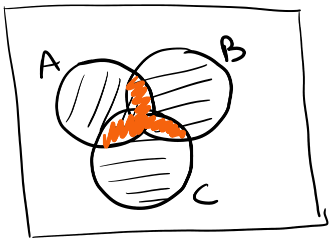
2. Una empresa quiere comprar cajas que contienen 40 herramientas cada una. El procedimiento control de calidad de cada caja consiste en tomar una muestra de 5 herramientas al azar de dicha caja y rechazarla si se encuentra una herramienta defectuosa. Si la caja a inspeccionar tiene 3 defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de rechazar la caja?



X = cantidad de defectuosas en la muestra de 5 herramientas

$X \sim HG(40, 3, 5) \longrightarrow p_X(k) = \dfrac{C_k^3 \cdot C_{5-k}^{37}}{C_5^{40}}$

$$
\begin{aligned}
P(\text{rechazar la caja}) &= P(X \geq 1) \\
&= 1 - P(X < 1) \\
&= 1 - P(X = 0) \\
&= 1 - p_X(0) \\
&= 1 - \frac{C_0^3 \cdot C_5^{37}}{C_5^{40}} \\
&= 1 - \frac{C_5^{37}}{C_5^{40}}
\end{aligned}
$$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B \cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

4. A y B son disjuntos (o excluyentes), esto es $A \cap B = \emptyset$. Suponiendo $P(B) \neq 0$, calcular $\mathbf{P}(A|B)$. ¿Son A y B independientes? ¿Qué pasa si $P(B) = 0$

A y B independientes : $P(A\cap B) = P(A)P(B) \xrightarrow[\text{si } P(B)\neq 0]{} \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$

$P(A|B) = P(A)$

* $P(B) \neq 0$

$P(A\cap B) = P(\emptyset) = 0$

$P(A)\underbrace{P(B)}_{\neq 0} =$

si $P(A) = 0$: $P(A)P(B) = 0$ ✓

si $P(A) \neq 0$: $P(A)P(B) \neq 0$ ✗

* $P(B) = 0$

$P(A\cap B) = P(\emptyset) = 0$ ✓

$P(A)P(B) = 0$