Variables aleatorias

Realizamos un experimento

→ espacio muestral Ω = conjunto de todos los resultados posibles

→ fución de probabilidad : P: Eventos $\longrightarrow [0,1]$

una variable aleatoria es una función

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

a partir de una variable aleatoria podemos definir eventos:

$$X = \alpha \longleftrightarrow \{ \omega \in \Omega : X(\omega) = \alpha \}$$

$$X \leq \alpha \longleftrightarrow \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha \}$$

Ejemplo: tiro una moneda dos veces

$\Omega = \{CC, CN, NC, NN\}$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cuenta la cantidad de veces que salió cara

$$X(CC) = 2$$

$$X(CN) = 1$$

$$X(NN) = 0$$

X toma valores en el conjunto $\{0,1,2\}$ ⇝ X es una variable aleatoria discreta

* función de probabilidad puntual fpp

$$P_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

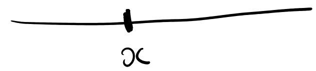
$$P_X(x) = \underbrace{P(X = x)} = P(\{ \omega \in \Omega : X(\omega) = x \})$$

→ en el ejemplo:

$\Omega = \{CC, CN, NC, NN\}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ cuenta la cantidad de veces que sale cara

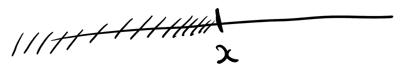
$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1/4 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



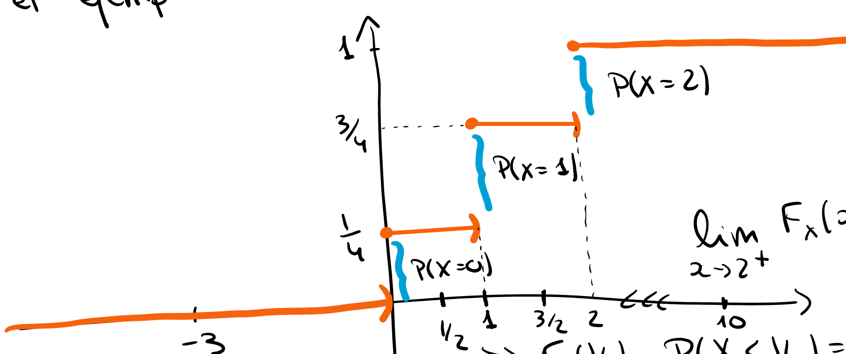
* función de distribución acumulada fda

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

$F_X(x) = P(X \le x)$



→ en el ejemplo



$$\lim_{x \to 2^+} F_X(x) = F_X(2)$$

$\to F_X(1/2) = P(X \le 1/2) = \frac{1}{4}$ // $p_X(1/2) = P(X = \frac{1}{2}) = 0$

$F_X(1) = P(X \le 1) = \frac{3}{4}$ $\quad F_X(2) = P(X \le 2) = 1$

$F_X(3/2) = P(X \le 3/2) = \frac{3}{4}$ $\quad F_X(10) = P(X \le 10) = 1$

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Propiedades de una función de distribución

① $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ $(P(\Omega) = 1)$

② $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ $(P(\emptyset) = 0)$

③ F_X es creciente : si $x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$

si $x \leq y \Rightarrow \{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$

$\Rightarrow P(\{X \leq x\}) \leq P(\{X \leq y\})$

$\Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$

④ F_X es continua por derecha : $\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 2
Se consideran las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

1.
$$F(x) = \begin{cases} \beta e^x & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \alpha \frac{x}{1+x} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Hallar α y β para que F sea una función de distribución.

* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

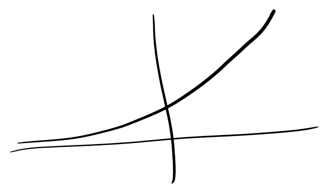
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \alpha \frac{x}{1+x} = \lim_{x \to +\infty} \alpha \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\frac{1}{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \alpha \frac{1}{\frac{1}{x} + 1}$$

$$= \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

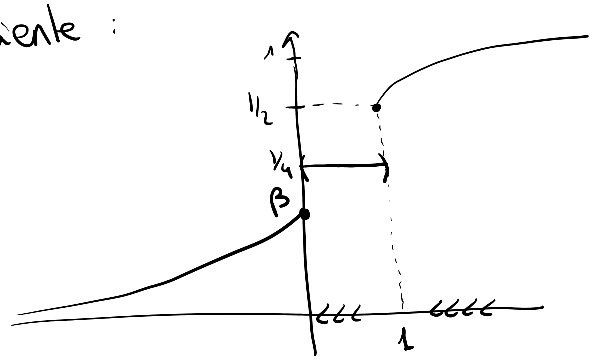
* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \beta e^{x} = 0$$



* F es creciente :

$\beta \leq 1/4$



* F continua por derecha

• en 1 : $\lim_{x \to 1^+} F(x) = F(1) = 1/2$

$$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$$ ✓

• en 0 : $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = \beta$

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{4}}$

Ejercicio 3

Se considera la función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable aleatoria X. Probar que:

1. $\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $\mathbf{P}(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

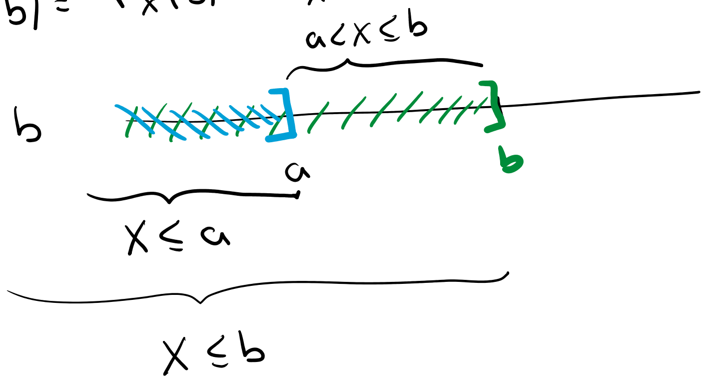
X variable aleatoria

$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de distribución

$F_X(x) = P(X \leq x)$

1. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

$a < X \leq b$



$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}$

$P(a < X \leq b) = P(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\})$

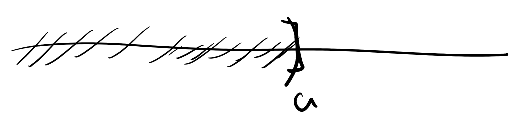
$= P(X \leq b) - P(X \leq a)$ porque $\{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$

$= F_X(b) - F_X(a)$

2. $P(X = a) = \underset{\overset{\shortparallel}{P(X \leq a)}}{F_X(a)} - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

$A \subset B \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

$\{X = a\} = \{X \leq a\} \setminus \{X < a\}$



$P(X = a) = P(\{X \leq a\} \setminus \{X < a\})$

$= P(X \leq a) - P(X < a)$

$= F_X(a) - P(X < a)$

$$P(X < a) = \lim_{x \to a^-} F_X(x) \;?$$

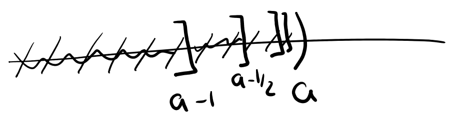
teorema de continuidad de la probabilidad

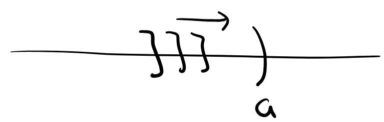
sea $\{A_n\}$ una sucesión creciente de eventos

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

$$\{X < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \leq a - \frac{1}{n}\right\}$$





$A_1 = \{X \leq a - 1\}$

$A_2 = \{X \leq a - \frac{1}{2}\}$ $\qquad A_n = \{X \leq a - \frac{1}{n}\}$

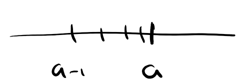
$A_3 = \{X \leq a - \frac{1}{3}\}$ $\qquad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$

$$P(X < a) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \leq a - \frac{1}{n}\right\}\right)$$ teorema de continuidad

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(X \leq a - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} F_X\left(a - \frac{1}{n}\right) \qquad \lim_{n \to \infty} a - \frac{1}{n} = a$$

$$= \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$



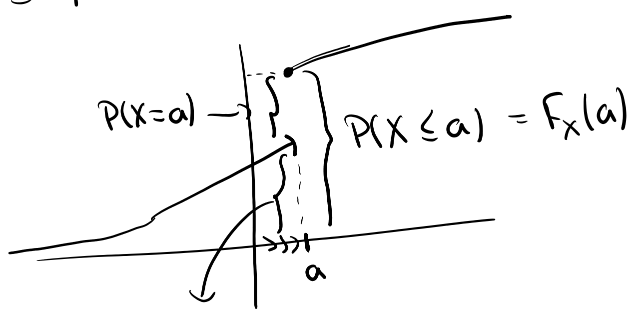
$$P(X < a) = \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

Entonces: $P(X=a) = P(X \leq a) - P(X < a)$

$$= F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} F_X(a) = P(X \leq a) \\[1em] \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = P(X < a) \end{array}}$$

$$P(X \leq a) = P(X < a) + P(X = a)$$



$$P(X < a) = \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$