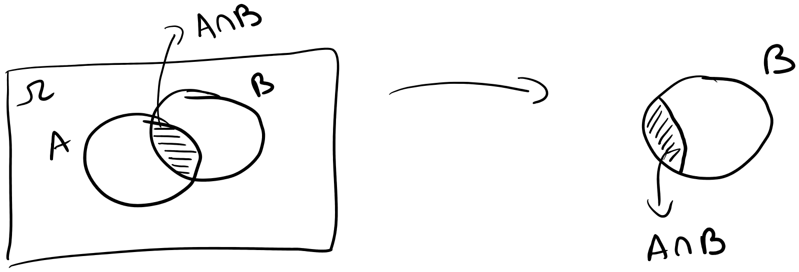
Probabilidad condicional

A y B eventos en un espacio muestral Ω

$P(B) > 0$

la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurre B $= P(A|B)$



$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

* regla del producto: $P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$

* formula de probabilidad total:

A y B eventos : $A = \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)}_{\text{unión disjunta}}$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$
$$= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

en general : si $C_1, \dots, C_n$ eventos disjuntos tales que $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \Omega$

entonces $P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \dots + P(A|C_n)P(C_n)$

* A y B son independientes $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

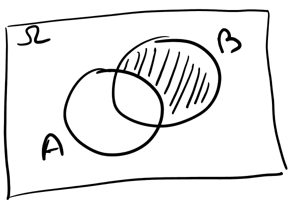
$$P(A|B) = P(A)$$

Ejercicio 4
Se consideran los eventos A y B tales que

1. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcular
   - *a*) $\mathbf{P}(A|B)$
   - *b*) $\mathbf{P}(B|A)$
   - *c*) $\mathbf{P}(A^C|B)$
   - *d*) $\mathbf{P}(B^C|A)$
   - *e*) $\mathbf{P}(A^C|B^C)$
   - *f*) $\mathbf{P}(B^C|A^C)$

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/4}{1/3} = 3/4$

c) $P(A^c|B) = \dfrac{P(A^c\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} - \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$



$A^c\cap B = B \setminus (A\cap B)$

$P(A^c\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

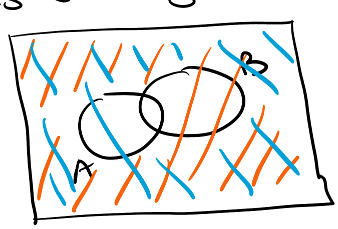
$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

$P(\;\;|B)$: Eventos $\to [0,1]$ es una función de probabilidad
evento

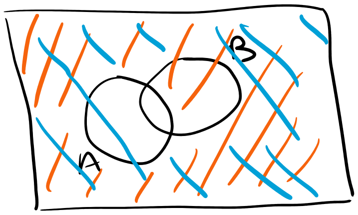
$P(B|\;\;)$ no es una función de probabilidad
evento

e) $P(A^c|B^c) = \dfrac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)} = \dfrac{P((A\cup B)^c)}{P(B^c)} = \dfrac{1-\overbrace{P(A\cup B)}^{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}}{1-P(B)}$

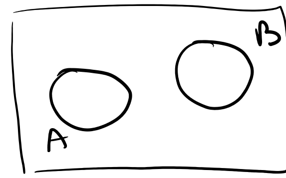
Leyes de Morgan



$A^c\cap B^c = (A\cup B)^c$



$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$



$P(B) = 1/4$

$P(A) = 1/4$

$P(A|B) = 0$

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \\ P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \neq 0 \end{cases}$$

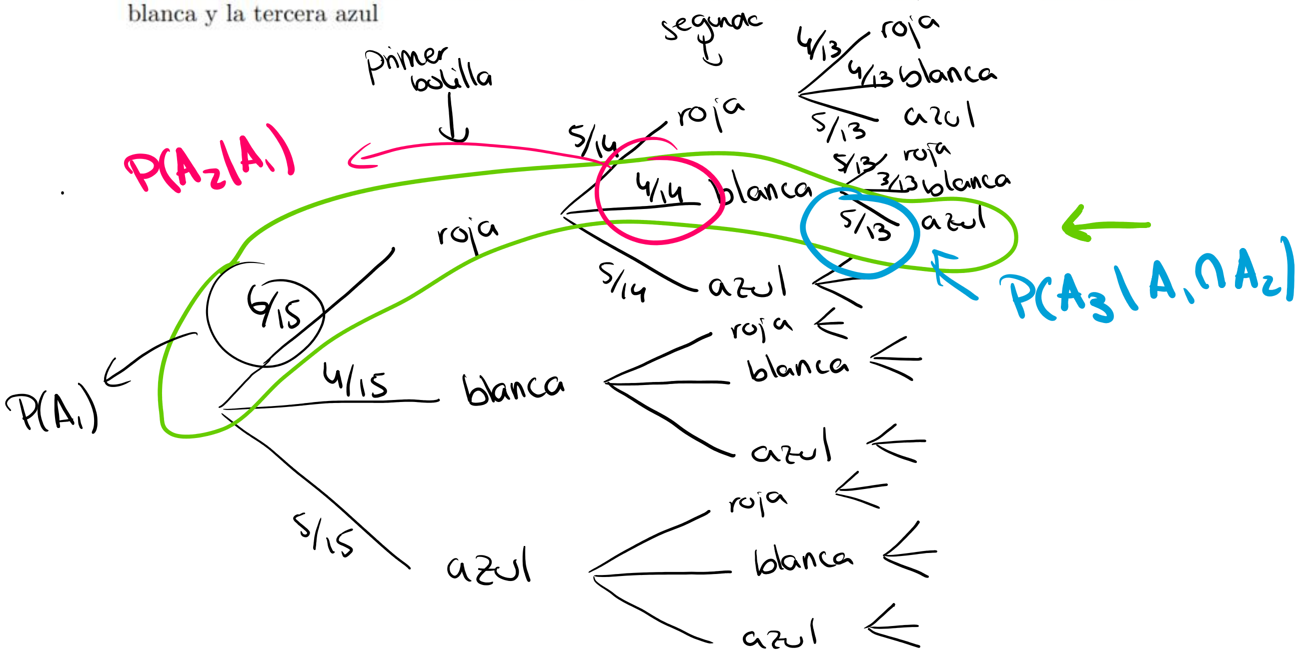
→ no son independientes

Ejercicio 5

15 bolillas

tercera

1. Se considera una caja que contiene 6 bolillas rojas, 4 blancas y 5 azules. Se extraen tres bolillas en forma sucesiva (sin reposición). Calcular la probabilidad que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul



A_1 = la primer bolilla es roja

A_2 = la segunda bolilla es blanca

A_3 = la tercer bolilla es azul

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

el evento que nos interesa $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P((A_1 \cap A_2) \cap A_3)$$
$$= P(A_3 | A_1 \cap A_2) P(A_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_3 | A_1 \cap A_2) P(A_2 | A_1) P(A_1)$$
$$= \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{6}{15}$$

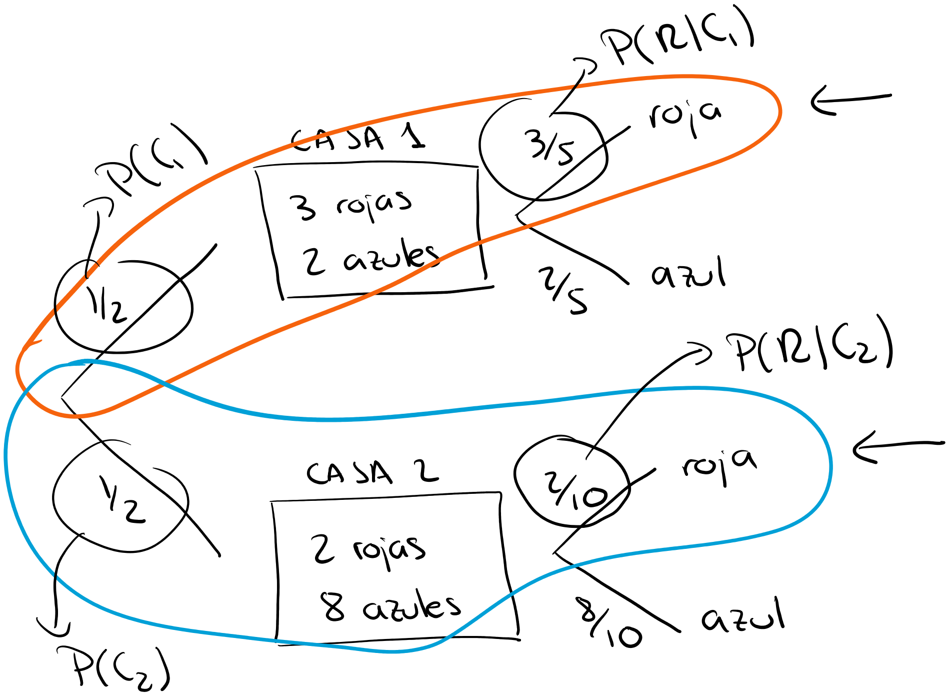
$P(A_1 | A_2) P(A_2)$

$P(A_2 | A_1) P(A_1)$

2. Se consideran dos cajas con bolas. La caja 1 contiene 3 bolas rojas y 2 azules, la caja 2 contiene 2 bolas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda, si se obtiene cara se saca una bola de la caja 1, y si se obtiene cruz se saca una bola de la caja 2.

   a) Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.

   b) Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la caja 1?



R = la bolilla que extraemos es roja

$P(R) = ?$

C_1 = sale la caja 1

C_2 = sale la caja 2

$R = (R \cap C_1) \cup (R \cap C_2)$

$R \setminus C_1$

$P(R \cap C_1) \to P(R|C_1) P(C_1)$

$P(R \cap C_1) \to P(C_1|R) P(R)$

$R = (R \cap C_1) \cup (R \cap C_2)$ $\qquad \rightarrow P(C_1|R)P(R)$

$$P(R) = P(R \cap C_1) + P(R \cap C_2)$$

$$= P(R|C_1)P(C_1) + P(R|C_2)P(C_2) \quad \text{formula de probabilidad total}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2}$$

b) $$P(C_1|R) = \frac{P(C_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|C_1)P(C_1)}{P(R)} = \frac{3/5 \cdot \frac{1}{2}}{3/5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$P(C_1 \cap R) \begin{cases} \rightarrow P(C_1|R)P(R) \\ \rightarrow P(R|C_1)P(C_1) \end{cases}$$

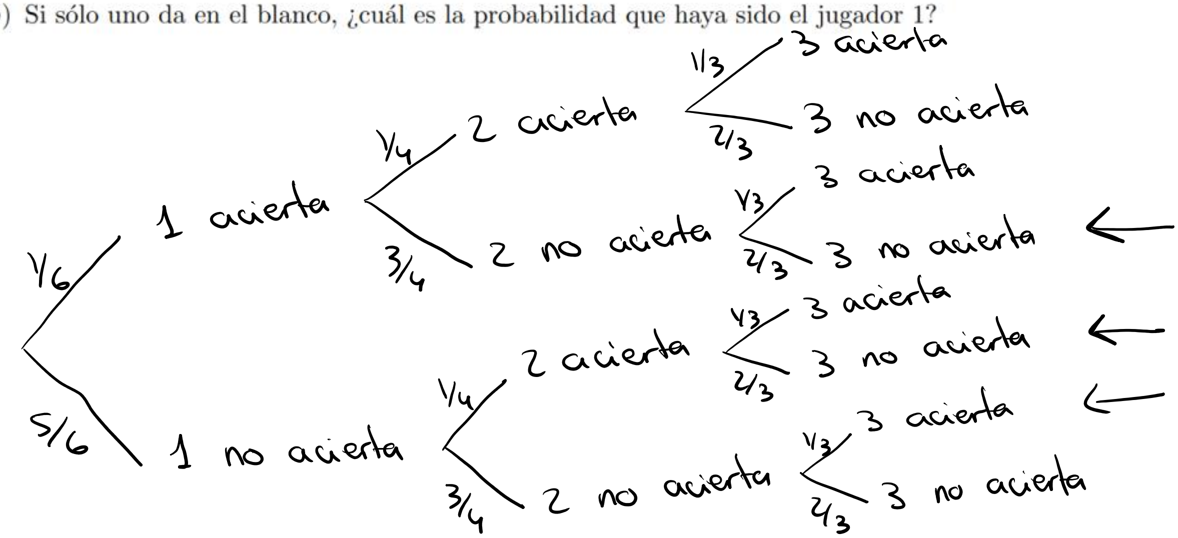
$$P(C_1|R) = \frac{P(R|C_1)P(C_1)}{P(R)} \quad \text{formula de Bayes}$$

Ejercicio 6

1. Tres jugadores tiran al blanco. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 3 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?

   b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?



A = el blanco es alcanzado una sola vez

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

$P(A \cap B) = P(A) P(B)$

A_1 = el jugador 1 acierta

A_2 = el jugador 2 acierta

A_3 = el jugador 3 acierta

$\left.\right\}$ eventos independientes

$$A = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

eventos independientes

$$= P(A_1) P(A_2^c) P(A_3^c) + P(A_1^c) P(A_2) P(A_3^c) + P(A_1^c) P(A_2^c) P(A_3)$$