Ejercicio 4

(b) * Se elige un grupo de n personas al azar. Descartando los años bisiestos y suponiendo por lo tanto años de 365 días, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas cumplan el mismo dia? ¿Cuánto tiene que ser n para que dicha probabilidad supere a 0.5?

→ si $n > 365$ entonces la probabilidad es 1

$$\Omega = \{ (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) : 1 \leq c_i \leq 365 \}$$

→ $n \leq 365$

c_1: cumpleaños de la 1ra persona

c_n: cumpleaños de la persona número n

P(al menos dos personas cumplen el mismo dia) = 1 - P(todas las personas cumplen en dias distintos)

$$P(\text{todas las personas cumplen en dias diferentes}) = \frac{CF}{CP}$$

$$CP = |\Omega| = 365^n$$

$(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$

c_1: 365 pos. c_2: 365 pos c_3: 365 pos c_n: 365 pos.

$$CF = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1) = A_n^{365} = \frac{365!}{(365-n)!}$$

$(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$

c_1: 365 pos. c_2: 364 ps. c_3: 363 pos c_n: $365 - (n-1) = 365 - n + 1$

$$P(\text{todas las personas cumplen en dias distintos}) = \frac{CF}{CP} = \frac{A_n^{365}}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365-n)!}$$

$P(\text{al menos dos personas cumplen el mismo dia}) = 1 - \dfrac{365!}{365^n (365-n)!} = P(n)$

n	$P(n)$
10	0,117
20	0,411
22	0,476
23	0,507
50	0,97
75	0,999

si $n \geq 23$, entonces $P(n) \geq 0,5$

1. Determinar el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, y en el caso que sea finito, indicar su cardinal. [2]

   (a) Lanzar al aire una moneda tres veces

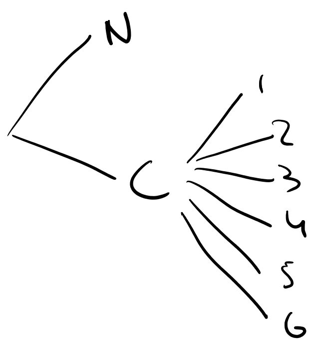
   (b) Extraer dos fichas sucesivamente y sin reposición de una bolsa que contiene fichas numeradas con los 5 dígitos pares.

   (c) Lanzar una moneda finalizando el experimento si sale número; si sale cara, tirar además un dado.

   (d) Seleccionar al azar dos alumnos de una clase de 30.

   (e) Valor de la tasa de inflación para este año.

c)



6. * Un secretario o secretaria coloca aleatoriamente n cartas diferentes en sobres. En cada uno de los sobres está escrito el nombre del destinatario en cada una de las n cartas, de modo que lo único que debe hacer es acertar cada carta en el sobre que le corresponde.

   (a) Calcular la probabilidad p_n de que al menos una carta vaya a parar al sobre que le toca.

   (b) Calcular $\lim_n p_n$

A_1 = la carta 1 va al sobre correcto

A_2 = la carta 2 va al sobre correcto

$A_n =$ la carta n va al sobre correcto

$A =$ al menos una de las cartas va al sobre correcto

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$P(A_1) = \frac{CF}{CP}$$

$$CF = 1\,(n-1)(n-2) \cdots 1 = (n-1)!$$

la carta 1 está en el sobre correcto, hay que asignarle sobre a la demás cartas

sobre correcto

carta 1 | carta 2 | carta 3 | ...... | carta n
1 pos | n-1 pos | n-2 pos. | | 1 pos.

$$CP = n\,(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$$

carta 1 | carta 2 | carta 3 | ..... | carta n
n pos | n-1 pos | n-2 pos | | 1 pos

$$P(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{n\,\cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{P(A_i) = \frac{1}{n}}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{CF}{CP}$$

$$CP = n!$$

$$CF = (n-2)(n-3)\cdots 1 = (n-2)!$$

↳ la carta 1 y la carta 2 van al sobre correcto, le tenemos que asignar sobre a las demás cartas

$$\underbrace{\text{carta 1}}_{\substack{\uparrow \\ 1\text{ pos}}} \quad \underbrace{\text{carta 2}}_{\substack{\uparrow \\ 1\text{ pos}}} \quad \underbrace{\text{carta 3}}_{\substack{\uparrow \\ (n-2)\text{ pos}}} \quad \underbrace{\text{carta 4}}_{\substack{\uparrow \\ n-3\text{ pos}}} \quad \cdots \quad \underbrace{\text{carta } n}_{\substack{\uparrow \\ 1\text{ pos}}}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{\cancel{(n-2)!}}{n\cdot(n-1)\,\cancel{(n-2)!}} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$1 \leq i < j \leq n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{CF}{CP} = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{\cancel{(n-3)!}}{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$CF: \underbrace{\text{carta 1}}_{\substack{\uparrow \\ 1 \text{ pos}}} \quad \underbrace{\text{carta 2}}_{\substack{\uparrow \\ 1 \text{ pos}}} \quad \underbrace{\text{carta 3}}_{\substack{\uparrow \\ 1 \text{ pos}}} \quad \underbrace{\text{carta 4}}_{\substack{\uparrow \\ n-3 \text{ pos}}} \quad \cdots \quad \underbrace{\text{carta } n}_{\substack{\uparrow \\ n}}$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$
$1 \leq i < j < k \leq n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{n!}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(A_i)}_{=y_n} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{P(A_i \cap A_j)}_{= \frac{1}{n(n-1)}} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \underbrace{P(A_i \cap A_j \cap A_k)}_{= \frac{1}{n(n-1)(n-2)}} - \dots$$

$i, j \in \{1, \dots, n\}$

$i \neq j$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$- \binom{n}{4} \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{n!}{2!\underbrace{(n-2)!}} \frac{1}{\underbrace{n(n-1)}_{n!}} + \frac{n!}{3!(n-3)!} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} _{n!}$$

$$- \frac{n!}{4!(n-4)!} \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

b) $\lim_n p_n = ?$

Taylor de exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-1} - 1 = -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

$$1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} + \dots$$

$$\lim_n p_n = 1 - e^{-1}$$

3. Si a un ómnibus con n asientos suben i personas con $i \leq n$.

   (a) ¿De cuántas maneras pueden elegirse los asientos en los que se sentará la gente?

   (b) ¿De cuántas maneras distintas puede disponerse la gente en el ómnibus?

   (c) * Asumamos ahora que la gente se dispone al azar y que cada disposición particular tiene la misma probabilidad (equiprobabilidad). Supongamos que $n = 4m$ y que el ómnibus tiene un pasillo en el medio; y que a cada costado del pasillo hay m filas de 2 asientos. Para darle un toque romántico, suponga ahora que sube al ómnibus Keanu Reeves o Angelina Jolie (según la opción de cada uno), ¿qué probabilidad tiene Ud. de quedar sentado al lado del personaje en cuestión?

a) elegimos i asientos en los n posibles (sin orden)

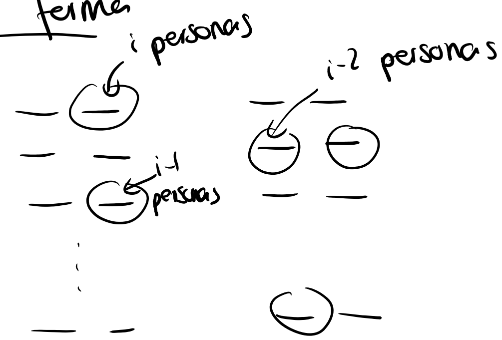
maneras de elegir los asientos $= C^n_i$

b) $\underbrace{\quad}_{1^{a}\text{ persona}}$ $\underbrace{\quad}_{2^{da}\text{ pers.}}$ $\underbrace{\quad}_{3^{a}\text{ persona}}$ $\underline{\quad}$ .... $\underbrace{\quad}_{i\text{-ésimo persona}}$

n asientos, $n-1$ asientos, $n-2$ asientos, ..., $n-i+1$ asientos

formas de sentar a la gente $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1) = A^n_i$

otra forma



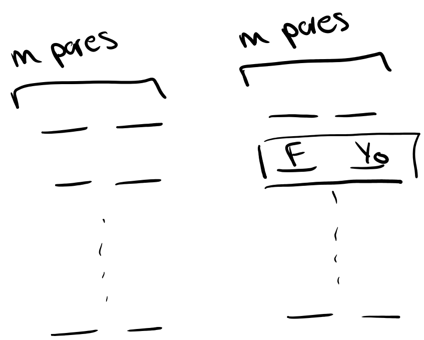
formas de elegir i asientos

$$\#\text{formas de sentar a la gente} = C^n_i \cdot i!$$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!}\, i!$$

$$= \frac{n!}{(n-i)!} = A^n_i$$

c)



$n = 4m$ asientos

entre las i personas estamos un famoso y yo

$$P(\text{quedar sentado al lado del famoso}) = \frac{CF}{CP}$$

$CP = A^n_i$ $\quad \boxed{F \mid Yo}$ $\quad \boxed{Yo \mid F}$

$CF = \#$ formas de sentar a la personas de forma que quedo al lado del famoso

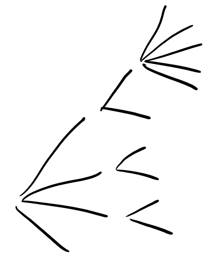
etapa 1: elegimos un par de asientos

$2m$ formas

etapa 2: elegimos como sentarnos en el par de asientos

2 formas → Yo F / F Yo

etapa 3: sentamos a las $i-2$ personas que quedan en los $n-2$ asientos disponibles



A^{n-2}_{i-2} formas

$CF = 2m \cdot 2 \cdot A^{n-2}_{i-2}$