12. Un sistema de canalización de agua tiene 4 compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

$\mathbb{P}(\text{I abierta}) = \mathbb{P}(\text{II abierta}) = \mathbb{P}(\text{IV abierta}) = 0,55,$
$\mathbb{P}(\text{III abierta}) = 0,36,$
$\mathbb{P}(\text{I cerrada, II abierta}) = \mathbb{P}(\text{I abierta, IV cerrada}) = \mathbb{P}(\text{I cerrada, III abierta}) = 0,2.$

$P(\text{I cerrada} \cap \text{II abierta})$

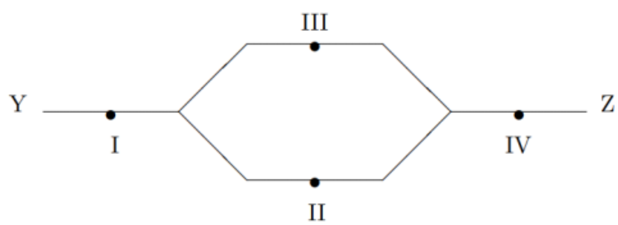
$\mathbb{P}(\text{II abierta, IV abierta}) = 0,35,$
$\mathbb{P}(\text{III abierta, IV cerrada}) = 0,26.$
$\mathbb{P}(\text{II abierta, III abierta}) = 0$ $\leftarrow$
$\mathbb{P}(\text{I o II o IV abierta}) = 0,85,$
$\mathbb{P}(\text{I o III o IV abierta}) = 0,87.$

$P(\text{I abierta} \cup \text{III abierta} \cup \text{IV abierta})$

Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.

$I_a = \text{I abierta}$

$I_c = \text{I cerrada}$



formas de que el torrente llegue a Z:

* $I_a \cap III_a \cap IV_a$
* $I_a \cap II_a \cap IV_a$

como II_a y III_a son eventos incompatibles, tenemos que $I_a \cap III_a \cap IV_a$ y $I_a \cap II_a \cap IV_a$ son incompatibles

$$P(\text{el torrente llegue}) = P((I_a \cap III_a \cap IV_a) \cup (I_a \cap II_a \cap IV_a))$$
$$= P(I_a \cap III_a \cap IV_a) + P(I_a \cap II_a \cap IV_a)$$

$$\overbrace{P(I_a \cup II_a \cup IV_a)}^{\text{dato}} = \overbrace{P(I_a) + P(II_a) + P(IV_a)}^{\text{dato}} \overbrace{- P(I_a \cap II_a) - P(I_a \cap IV_a)}^{\text{calcular}}$$
$$- \underbrace{P(II_a \cap IV_a)}_{\text{dato}} + P(I_a \cap II_a \cap IV_a)$$

$$P(I_a \cap III_a \cap IV_a) = ?$$

$$\underbrace{P(I_a \cup III_a \cup IV_a)}_{0{,}87} = \underbrace{P(I_a)}_{0{,}55} + \underbrace{P(III_a)}_{0{,}36} + \underbrace{P(IV_a)}_{0{,}55} - \underbrace{P(I_a \cap III_a)}_{0{,}16}$$

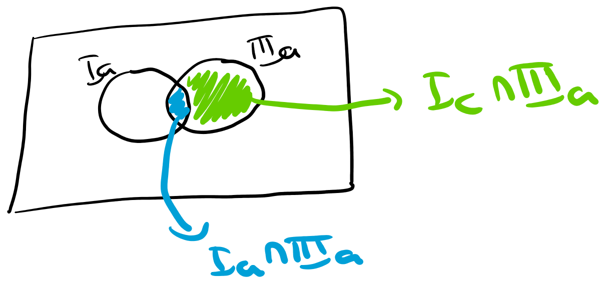
$$- \underbrace{P(I_a \cap IV_a)}_{0{,}35} - \underbrace{P(III_a \cap IV_a)}_{0{,}1}$$

$$+ \underbrace{P(I_a \cap III_a \cap IV_a)}$$

$$P(I_a \cap III_a) = ?$$

$$P(III_a) = 0{,}36$$

$$P(I_c \cap III_a) = 0{,}2$$



$III_a = (I_a \cap III_a) \cup (I_c \cap III_a)$ unión disjunta

$$P(III_a) = P(I_a \cap III_a) + P(I_c \cap III_a)$$

$$\Rightarrow P(I_a \cap III_a) = P(III_a) - P(I_c \cap III_a) = 0{,}36 - 0{,}2 = 0{,}16$$

$$P(I_a \cap IV_a) = ?$$

$$P(I_a \cap IV_c) = 0{,}2$$

$$\underbrace{(I_a \cap IV_a) \cup (I_a \cap IV_c)}_{\text{unión disjunta}} = I_a$$

$$P(I_a) = P(I_a \cap IV_a) + P(I_a \cap IV_c)$$

$$\Rightarrow P(I_a \cap \overline{IV}_a) = P(I_a) - P(I_a \cap \overline{IV}_c)$$

$$= 0{,}55 - 0{,}2$$

$$= 0{,}35$$

$$P(III_a \cap \overline{IV}_a) = ?$$

$$P(III_a \cap \overline{IV}_c) = 0{,}26$$

$$\underbrace{(III_a \cap \overline{IV}_a) \cup (III_a \cap \overline{IV}_c)}_{\text{unión disjunta}} = III_a$$

$$P(III_a) = P(III_a \cap \overline{IV}_a) + P(III_a \cap \overline{IV}_c)$$

$$\Rightarrow P(III_a \cap \overline{IV}_a) = P(III_a) - P(III_a \cap \overline{IV}_c)$$

$$= 0{,}36 - 0{,}26$$

$$= 0{,}1$$

Equiprobabilidad

equiprobabilidad = todos los resultados del experimento tienen la misma probabilidad
= todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad

ej: tiramos un dado de 6 caras

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(1) = 1/6$

$P(i) = 1/6 \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$
\begin{aligned}
P(\text{el resultado es par}) &= P(\{2, 4, 6\}) \\
&= P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) \\
&= P(2) + P(4) + P(6) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{3}{6} = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\Omega|} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}
\end{aligned}
$$

en general: si tenemos un evento A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

2. (a) Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 36 posibilidades.

   i. Construir un espacio muestral para este experimento.
   ii. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?
   iii. ¿Cuál es la probabilidad de acertar en al menos 3 números (es decir, acertar exactamente 3, exactamente 4, o exactamente 5 números)?

i) $\Omega = \{ \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\} : n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \in \{1, \dots, 36\}, \underbrace{n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_4 \neq n_5}_{\text{de más}} \}$

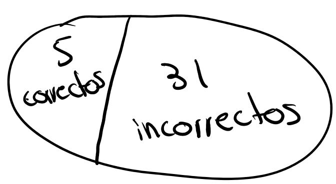
$|\Omega| = C^{36}_5$

ii) $P(\text{ganar}) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{C^{36}_5} \approx 0{,}0000027$

iii) $P(\text{acerter al menos 3 números}) = P(\{\text{acerter exactamente 3}\} \cup \{\text{acerter exactamente 4}\} \cup \{\text{acerter exactamente 5}\})$

$= P(\text{acerter exactamente 3}) + P(\text{acerter exactamente 4}) + P(\text{acerter exactamente 5})$

$P(\text{acerter exactamente 3}) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{C^5_3 \, C^{31}_2}{C^{36}_5}$



$P(\text{acerter exactamente 4}) = \dfrac{CF}{CP} = \dfrac{C^5_4 \cdot C^{31}_1}{C^{36}_5}$

$P(\text{acerter exactamente 5}) = \dfrac{CF}{CP} = \dfrac{1}{C^{36}_5}$

$P(\text{acerter al menos 3}) = \dfrac{C^5_3 \cdot C^{31}_2}{C^{36}_5} + \dfrac{C^5_4 \cdot C^{31}_1}{C^{36}_5} + \dfrac{1}{C^{36}_5}$

4. (a) Calcular la probabilidad de obtener una suma de puntos menor que 18 al tirar 3 dados.

(b) * Se elige un grupo de n personas al azar. Descartando los años bisiestos y suponiendo por lo tanto años de 365 días, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas cumplan el mismo dia? ¿Cuánto tiene que ser n para que dicha probabilidad supere a 0.5?

a) $\Omega = \{3, 4, \ldots, 18\}$ → no hay equiprobabilidad

$p(\text{la suma sea } 3) \neq p(\text{la suma sea } 5)$

1, 1, 1

1 1 3
3 1 1 .....
1 3 1

$\Omega = \{(i,j,k) : 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq 6,\ 1 \leq k \leq 6\}$

$= \{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3) \ldots\}$ → aca si tenemos equiprobabilidad

$\Omega = \{\ 1\,1\,1,\ \ 1\,1\,2,\ \ 1\,1\,3,\ \ldots\ \}$ → no hay equiprobabilidad

(1,1,1)

(1,1,2)
(1,2,1)
(2,1,1)

Vamos a considerar este espacio muestral:

$\Omega = \{(i,j,k) : 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq 6,\ 1 \leq k \leq 6\}$

$p(\text{obtener una suma} < 18) = p((\text{obtener suma} = 18)^c)$

$= 1 - p(\text{obtener suma} = 18)$

$$p(\text{obtener suma} = 18) = \frac{\overset{(6,6,6)}{CF}}{CP} = \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{6^3}$$

b) n personas

$p(\text{al menos 2 cumplan el mismo dia}) = 1 - p(\text{todos cumplen en dias distintos})$

$$p(\text{todos cumplen en dias distintos}) = \frac{CF}{CP}$$

=

$n = 3$

persona 1 365 pos
persona 2 365 pos
persona 3 365 pos

$\Omega = 365^3$

1 de enero * *
2 de enero *
3 de enero
⋮

1, 2, ..., 365

persona 1 1ro de enero
persona 2 1ro de enero
persona 3 1ro de febrero

$\longrightarrow \boxed{(1, 1, 32)}$

p(exactamente 2 cumpla el mismo dia) $= \frac{CF}{CP}$

$= \frac{C_2^3 \cdot 365 \cdot 364}{365^3}$

1 enero * * *
2 enero
⋮
1 de febrero

$(1, 1, 1)$

$\Omega = \{(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) : 1 \leq c_i \leq 365\}$ ← equiprobabilidad

$|\Omega| = 365^n$

lo seguimos el lunes!

6. * Usted va a la panadería a comprar una docena de bizcochos. En la panadería sólo quedan croissants, margaritas y galletas en cantidades suficientes.

(a) ¿Cuántas elecciones distintas puede hacer? dandole 1 bizcocho a cada persona

(b) Usted llega a la facultad con α croissants, β margaritas y γ galletas ($\alpha + \beta + \gamma = 12$) y los reparte entre usted y 11 amigos. ¿de duántas formas los puede repartir? (Calcular en función de α, β y γ). ¿Cuánto deben valer α, β y γ para que dicha cantidad sea máxima? (Sugerencia: ver como varía dicha cantidad al variar en una unidad alguno de los parámetros)

$\underbrace{\alpha + \beta + \gamma = 12}$ bitzcochos a repartir entre 12 personas

$12 - \alpha - \beta = \gamma$

$\#$ formas de repartir $= C^{12}_{\alpha} \cdot C^{12-\alpha}_{\beta} \cdot \underbrace{C^{\overbrace{12-\alpha-\beta}^{\gamma}}_{\gamma}}_{=1}$

$$= \frac{12!}{\alpha!\,\cancel{(12-\alpha)!}} \cdot \frac{\cancel{(12-\alpha)!}}{\beta!\,(12-\alpha-\beta)!}$$

$$= \frac{12!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

buscamos α, β y γ tal que $\alpha!\,\beta!\,\gamma!$ sea mínimo