$X_1, \dots, X_n$ iid $\sim X$

*

- Si n es grande, entonces $X_1 + \cdots + X_n$ es aproximadamente $N(n\mu, n\delta^2)$
- Si n es grande, entonces $\overline{X_n}$ es aproximadamente $N\left(\mu, \frac{\delta^2}{n}\right)$

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Ejercicio 5.
Se consideran tres sucesos A, B y C tales que

- B y C son incompatibles, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$; B y C incompatibles $\Rightarrow P(B \cap C) = 0$
- A y C son independientes; $\Rightarrow P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $\mathbb{P}(B \cup C) = 0{,}6$
- $\mathbb{P}(A|B) = 1/6$ $\quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}85$

Entonces:

1. $\mathbb{P}(A) =$

   (A) 0,6 (B) 0,4 (C) 0,5

2. $\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) =$

   (A) 0,7 (B) 0,37 (C) 0,55

$$1.\ \underbrace{P(A \cup B)}_{0{,}85} = P(A) + \underbrace{P(B)}_{0{,}3} - \underbrace{P(A \cap B)}_{0{,}05} \Rightarrow P(A) = \underbrace{P(A \cup B)}_{0{,}85} - \underbrace{P(B)}_{0{,}3} + \underbrace{P(A \cap B)}_{0{,}05} = 0{,}6$$

$$\left.\underbrace{P(B \cup C)}_{= 0{,}6} = P(B) + \underbrace{P(C)}_{= P(B)} - \underbrace{P(B \cap C)}_{= 0}\right\} \Rightarrow 0{,}6 = 2P(B) \Rightarrow P(B) = 0{,}3$$

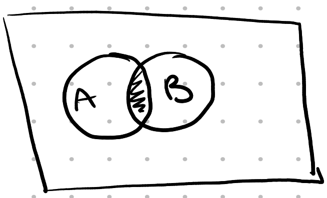
$$P(A|B) = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{P(B)}{6} = \frac{0{,}3}{6} = 0{,}05$$

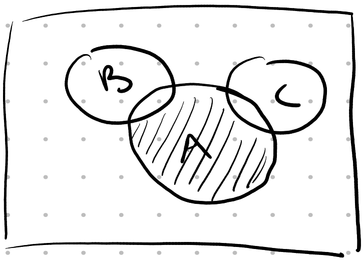
$$2.\ P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A \cap (B \cup C)^c)$$

$$= P((B \cup C)^c) - P(A^c \cap (B \cup C)^c)$$

$$= 1 - P(B \cup C) - P($$

$$P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B)$$





$$A \cap B^c \cap C^c = (A \setminus (B \cap A)) \cap (A \setminus (A \cap C))$$

$$= (A \setminus (A \cap B)) \setminus (A \cap C)$$

$$P(A \cap B^c \cap C^c) = P((A \setminus (A \cap B)) \setminus (A \cap C))$$

$$= \underbrace{P(A)}_{0,6} - \underbrace{P(A \cap B)}_{0,05} - \underbrace{P(A \cap C)}_{0,18} = 0,37$$

$$P(A \cap C) = P(A) \underbrace{P(C)}_{\substack{\shortparallel \\ P(B)}} = 0,6 \cdot 0,3$$

Ejercicio 3

El Rey Helado le manda 5 kilos de oro a su orfebre de confianza, para que le acuñe mil monedas de oro de cinco gramos cada una. El orfebre le avisa que la variable "peso de una moneda" tiene una desviación estándar de 0,20 gramos. El rey aceptará el lote de monedas siempre que la masa total sea mayor o igual a 4,8 kilos. Si el orfebre configura la máquina para que el valor esperado del peso de cada moneda sea 4,81 gramos, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que el lote pase la prueba y sea aceptado por el rey?

(A) 0.52 **(B)** 0.731 **(C)** 0.689 **(D)** 0.877 **(E)** 0.943

X = peso de una moneda

$E(X) = 4,81 \qquad \sigma_X = 0,20$

$X_1, X_2, \dots, X_{1000}$ iid $\sim X$

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_{1000} \geq 4800) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}}{1000} \geq \frac{4800}{1000}\right)$$

$$= P(\overline{X_{1000}} \geq 4,8)$$

$* \; P(\overline{X_{1000}} \geq 4,8)$

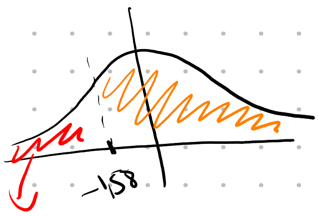
$$\frac{0,2^2}{1000} = \frac{0,04}{1000} = 0,00004$$

$$TCL: \; \overline{X_{1000}} \sim \mathcal{N}\left(4,81 \, , \frac{0,2^2}{1000}\right)$$

$$\overline{X_{1000}} \sim \mathcal{N}(4,81 \, , 0,00004)$$

$$P(\overline{X_{1000}} \geq 4,8) = P\left(\frac{\overline{X_{1000}} - 4,81}{\sqrt{0,00004}} \geq \frac{4,8 - 4,81}{\sqrt{0,00004}}\right)$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{\overline{X_{1000}} - 4,81}{\sqrt{0,00004}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq -1,58\right)$$



$\phi(-1,58)$

$$= 1 - \phi(-1,58)$$

$$= 1 - (1 - \phi(1,58))$$

$$= \phi(1,58)$$

$$= 0,9429$$

Ejercicio 9 (8 puntos)

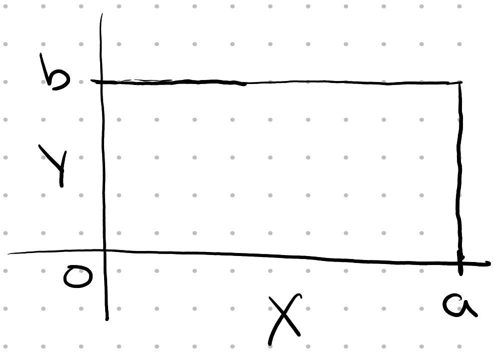
Sean dos variables aleatorias independientes X, con distribución uniforme en $[0,a]$ e Y, con distribución uniforme en $[0,b]$ tal que $0 < b < 1 < a$. Entonces la probabilidad $\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} \leq 1/3\right) =$.

(A) $\frac{b}{4a}$ **(B)** $\frac{a}{4b}$ **(C)** $\frac{b}{3a}$ **(D)** $\frac{a}{3b}$

$X \sim \mathcal{U}[0,a] \; , \; Y \sim \mathcal{U}[0,b]$

$0 < b < 1 < a$

$P\left(\frac{X}{X+Y} \leq \frac{1}{3}\right) = ?$



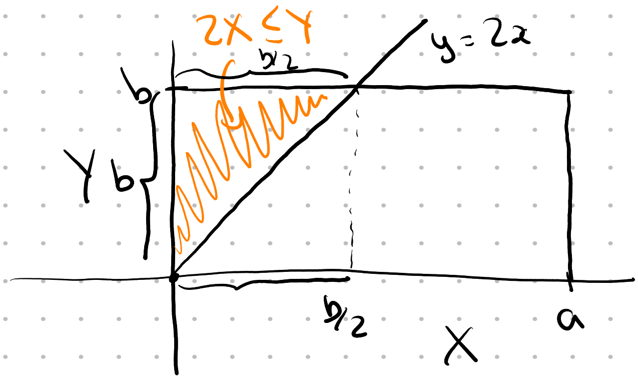
$$\frac{X}{X+Y} \leq \frac{1}{3} \iff X \leq \frac{1}{3}(X+Y)$$

$$\iff X \leq \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}Y$$

$$\iff X - \frac{1}{3}X \leq \frac{1}{3}Y$$

$$\iff \frac{2}{3}X \leq \frac{1}{3}Y$$

$$\iff 2X \leq Y \qquad 2x = y$$



$$P\left(\frac{X}{X+Y} \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{\text{area triangulo naranja}}{\text{area rectangulo}} = \frac{\frac{b \cdot b/2}{2}}{ab} = \frac{\frac{b^2}{4}}{ab} = \frac{b^2}{4} \cdot \frac{1}{ab} = \frac{b}{4a}$$

Ejercicio 6.

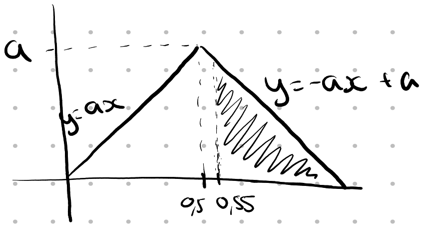
Se asume que los puntajes obtenidos por los estudiantes en un examen (normalizados entre 0 y 1) se distribuyen según la siguiente densidad:

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq 1/2 \\ a(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad -ax + a$$

El umbral de aprobación es igual a 0,55.

1. La probabilidad de que un estudiante apruebe el examen es:

(A) $0,605$ (B) $0,2025$ (C) $0,405$



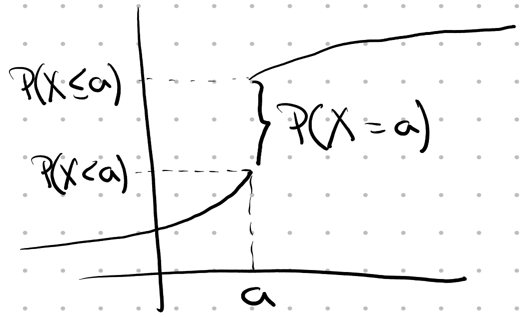
$$P(X \geq 0,55) = \int_{0,55}^{1} f_X(x)\,dx = \text{area del triangulo}$$

X variable aleatoria absolutamente continua

X tiene función densidad f_X

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx}_{} \quad \text{continuo}$$

X variable continua (no absolutamente)



si X tiene función densidad: $P(X=a) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow F_X$ es continua