PRACTICO 1

espacio muestral Ω:

Ω = conjunto de todos los resultados posibles

ej: si el experimento es tirar un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

evento o suceso: subconjuntos del espacio muestral

en el ejemplo: $A_1 = \{2\}$

$A_2 = \{2, 4, 6\}$

$A_3 = \{2, 5\}$ $A_4 = \{3, 4\}$

$A_3 \cap A_4 = \emptyset$

Axiomas de Kolmogorov

Ω un espacio muestral

una función P: Eventos $\longrightarrow [0,1]$ es una función de probabilidad si verifica:

1. $P(A) \geq 0$ para todo evento A

2. $P(\Omega) = 1$

3. si $\{A_k\}$ es una sucesión de eventos incompatibles dos a dos

$A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

no pueden ocurrir simultaneamente A_i y A_j si $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

si A y B son incompatibles $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

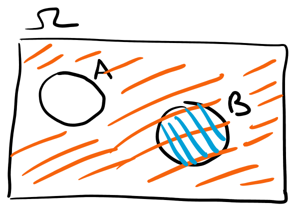
9. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran dos sucesos A y B tales que $\mathbb{P}(A) = 1/3$ y $\mathbb{P}(B) = 1/2$. Determinar el valor de $\mathbb{P}\left(A^C \cap B\right)$ en los siguientes casos:

(a) A y B incompatibles (mutuamente excluyentes). $A \cap B = \emptyset$

(b) $A \subset B$.

(c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$.

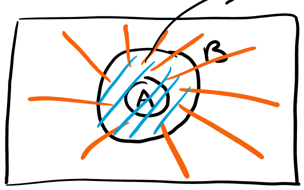
a)



$$A^c \cap B = B$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) = 1/2$$

b)



$A^c \cap B = B \setminus A$

$$\underbrace{A \cup (A^c \cap B)}_{\text{unión de eventos incompatibles}} = B$$

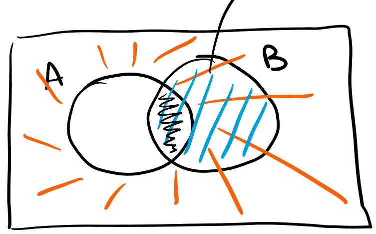
$$P(B) = P(A \cup (A^c \cap B))$$

$$= P(A) + P(A^c \cap B)$$

$$\Rightarrow P(\underbrace{A^c \cap B}_{B \setminus A}) = P(B) - P(A) = 1/2 - 1/3 = 3/6 - 2/6 = 1/6$$

c) $P(A \cap B) = 1/8$

$A^c \cap B = B - (A \cap B) = B \setminus (A \cap B)$ y $A \cap B \subset B$



$$P(A^c \cap B) = P(B \setminus (A \cap B))$$

$$= P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

⚠ porque $A \cap B \subset B$

<u>otra forma:</u> $B = \underbrace{(A \cap B) \cup (A^c \cap B)}_{\text{unión de eventos incompatibles}}$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

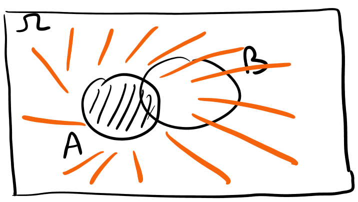
$$= 1/2 - 1/8$$

10. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran los sucesos A y B con: $\mathbb{P}(A) = 3/8$, $\mathbb{P}(B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

(a) $\mathbb{P}(A^C)$ y $\mathbb{P}(B^C)$.

(b) $\mathbb{P}(A \cup B)$.

a) $P(A^c)$

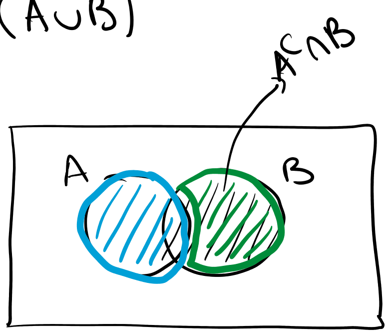


$$\underbrace{A \cup A^c}_{\text{unión de eventos incompatibles}} = \Omega$$

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c)$$
$$= P(A) + P(A^c)$$

$$\Rightarrow P(A^c) = P(\Omega) - P(A)$$
$$= 1 - P(A)$$
$$= 1 - 3/8$$

b) $P(A \cup B)$



$$A \cup B = \overbrace{A \cup (A^c \cap B)}^{\text{unión de eventos disjuntos}}$$
$$= \underbrace{A \cup (B \setminus (A \cap B))}_{\text{unión de eventos disjuntos}}$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$
$$= P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B)$$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A \cap B))$$
$$= P(A) + P(B \setminus A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

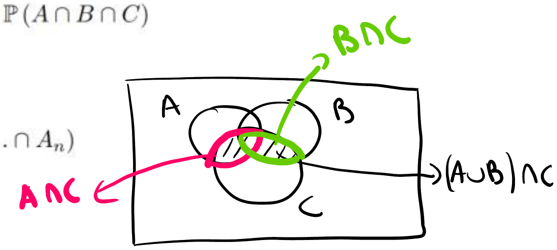
11. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

(a) * Si A, B y C son sucesos entonces se cumple que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(b) * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$



a)
$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) \\
&= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

b)
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j)$$

vamos a probarlo por inducción en n

caso base: si $n = 2$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$ ✓

paso inductivo:

hipótesis: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$

queremos que es cierto para $n+1$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \dots - P(A_1 \cap A_n)$$

$$- \dots + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + P(A_1 \cap A_{n-1} \cap A_n) + \dots + \dots +$$

$$+ P(A_{n+1}) - P\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big)$$

$$= P(A_1) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \boxed{- P(A_1 \cap A_2) - \dots - P(A_1 \cap A_n)}$$

$$- \dots + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + P(A_1 \cap A_{n-1} \cap A_n) + \dots +$$

$$\dots - \Big(\boxed{P(A_1 \cap A_{n+1})} + P(A_2 \cap A_{n+1}) + \dots P(A_n \cap A_{n+1}) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_{n+1})$$

$$- \dots + \dots \pm P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1})\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1})$$

12. Un sistema de canalización de agua tiene 4 compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

$\mathbb{P}$ (I abierta) $= \mathbb{P}$ (II abierta) $= \mathbb{P}$ (IV abierta) $= 0,55$,
$\mathbb{P}$ (III abierta) $= 0,36$,
$\mathbb{P}$ (I cerrada, II abierta) $= \mathbb{P}$ (I abierta, IV cerrada) $= \mathbb{P}$ (I cerrada, III abierta) $= 0,2$.

P(I cerrada ∩ II abierta)

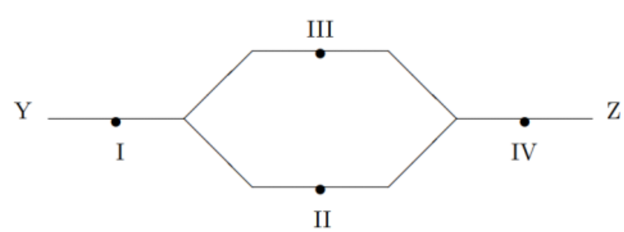
$\mathbb{P}$ (II abierta, IV abierta) $= 0,35$,
$\mathbb{P}$ (III abierta, IV cerrada) $= 0,26$.
$\mathbb{P}$ (II abierta, III abierta) $= 0$ ←
$\mathbb{P}$ (I o II o IV abierta) $= 0,85$,
$\mathbb{P}$ (I o III o IV abierta) $= 0,87$.

P(I abierta ∪ III abierta ∪ IV abierta)

Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.

I_a = I abierta

I_c = I cerrada



formas de que el torrente llegue a Z:

- $\mathrm{I}_a \cap \mathrm{III}_a \cap \mathrm{IV}_a$
- $\mathrm{I}_a \cap \mathrm{II}_a \cap \mathrm{IV}_a$

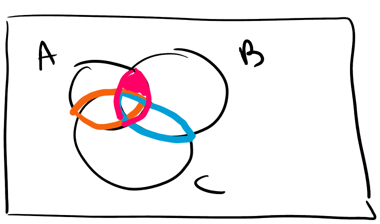
como II_a y III_a son eventos incompatibles, tenemos que $\mathrm{I}_a \cap \mathrm{III}_a \cap \mathrm{IV}_a$ y $\mathrm{I}_a \cap \mathrm{II}_a \cap \mathrm{IV}_a$ son incompatibles

$$P(\text{el torrente llegue}) = P((\mathrm{I}_a \cap \mathrm{III}_a \cap \mathrm{IV}_a) \cup (\mathrm{I}_a \cap \mathrm{II}_a \cap \mathrm{IV}_a))$$
$$= P(\mathrm{I}_a \cap \mathrm{III}_a \cap \mathrm{IV}_a) + P(\mathrm{I}_a \cap \mathrm{II}_a \cap \mathrm{IV}_a)$$

$$\overbrace{P(\mathrm{I}_a \cup \mathrm{II}_a \cup \mathrm{IV}_a)}^{\text{dato}} = \overbrace{P(\mathrm{I}_a) + P(\mathrm{II}_a) + P(\mathrm{IV}_a)}^{\text{dato}} - \overbrace{P(\mathrm{I}_a \cap \mathrm{II}_a) - P(\mathrm{I}_a \cap \mathrm{IV}_a)}^{\text{calcular}}$$
$$- \underbrace{P(\mathrm{II}_a \cap \mathrm{IV}_a)}_{\text{datos}} + P(\mathrm{I}_a \cap \mathrm{II}_a \cap \mathrm{IV}_a)$$

Ejercicio 7

(k) Ocurren por lo menos dos de los tres sucesos.



$(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A)$