Probabilidad Condicional e Independencia
Práctico 3

Ejercicio 1 : Se consideran los sucesos A y B tales que $P(A) = 1/4$ y $P(A \cup B) = 1/3$. Calcular $P(B)$ en los siguientes casos:

1. Si A y B son independientes.
2. Si A y B son disjuntos (o excluyentes).
3. Si A es un subconjunto de B.

Ejercicio 2 : Si A y B son sucesos independientes y B y C también son sucesos independientes. ¿Puede afirmarse que A y C son independientes? En caso afirmativo demostrarlo, en caso contrario dar un contraejemplo.

Ejercicio 3 : Demostrar que A es independiente de A si y sólo si $P(A) = 0$ ó $P(A) = 1$.

Ejercicio 4 : Se consideran los eventos A y B tales que

1. $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ y $P(A \cap B) = 1/4$. Calcular

   Lo mismo

   a) $P(A|B)$
   b) $P(B|A)$
   c) $P(A^c|B)$
   d) $P(B^c|A)$
   e) $P(A^c|B^c)$
   f) $P(B^c|A^c)$

2. $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcular

   a) $P(A|B)$
   b) $P(B|A)$

3. $B \subseteq A$. Calcular $P(A|B)$.
4. A y B son disjuntos (o excluyentes), esto es $A \cap B = \emptyset$. Suponiendo $P(B) \neq 0$, calcular $P(A|B)$. ¿Son A y B independientes? ¿Qué pasa si $P(B) = 0$?

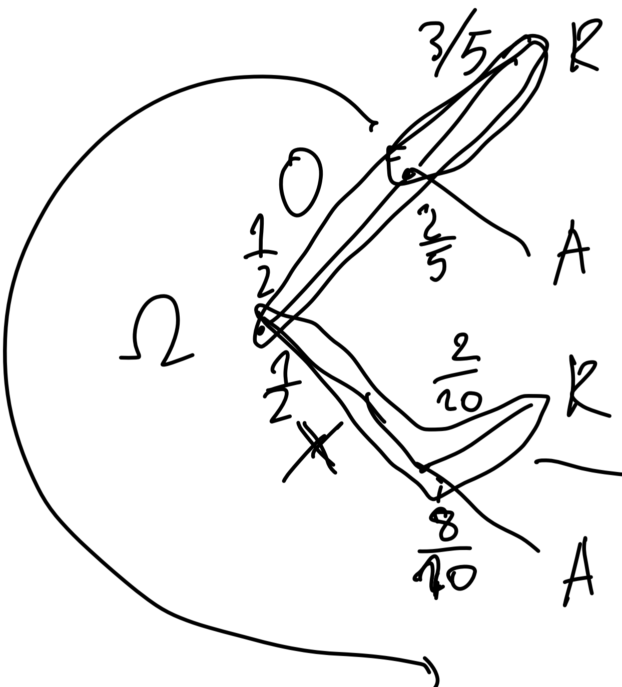
Ejercicio 5 :

1. Se considera una caja que contiene seis bolillas rojas, cuatro blancas y cinco azules. Se extraen tres bolillas en forma sucesiva (sin reposición). Calcular la probabilidad que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul
2. Se consideran dos cajas con bolas. La Caja 1 contiene tres bolas rojas y dos azules, la Caja 2 contiene dos bolas rojas y ocho azules. Se lanza una moneda, si se obtiene cara se saca una bola de la Caja 1, y si se obtiene cruz se saca una bola de la Caja 2.

   a) Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.
   b) Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la Caja 1?

5) 2) Caja 1: 3R
2A

Caja 2: 2R
8A



a) $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|O)\mathbb{P}(O) + \mathbb{P}(R|X)\mathbb{P}(X)$

$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}$

b) $\mathbb{P}(O|R) = \frac{\mathbb{P}(R|O)\mathbb{P}(O)}{\mathbb{P}(R)}$

$= \frac{\mathbb{P}(R|O)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)}$

$= \frac{3}{4}$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Bayes

5) a)

6 R	$\xrightarrow{\text{si } 1R}$	5 R	$\xrightarrow{\text{si } 1R \cap 2B}$	4R
4 B		4 B		3B
5 A		5 A		5A

$$\mathbb{P}(1R) \cdot \mathbb{P}(2B|1R) \cdot \mathbb{P}(3A|1R \cap 2B)$$

$$\frac{6 \text{ rojas}}{15 \text{ total}} \cdot \frac{4 \text{ blancas}}{14 \text{ total}} \cdot \frac{5 \text{ azules}}{13 \text{ total}}$$

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 5}{15 \cdot 14 \cdot 13}$$

4) $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

a) $$\mathbb{P}(A|B):=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

e) $$\mathbb{P}(A^c|B^c):=\frac{\mathbb{P}(A^c\cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)}=\frac{\mathbb{P}((A\cup B)^c)}{\mathbb{P}(B^c)}$$

$$=\frac{1-\mathbb{P}(A\cup B)}{1-\mathbb{P}(B)}$$

$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

$A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$

$$=\boxed{\frac{1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B))}{1-\mathbb{P}(B)}}$$

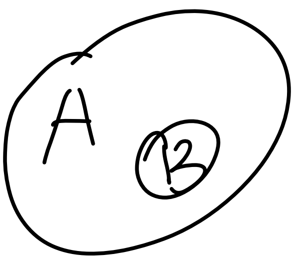
---

4) 3) $\boxed{B\subseteq A}$

¿$\mathbb{P}(A|B)$?

$\mathbb{P}(A|B)=1$

$$\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}=\boxed{1}$$



$\mathbb{P}(A|B)=1 \Longleftarrow$ A = medir entre 175 y 185

B = medir 180

4) 4) $\boxed{A \cap B = \emptyset}$

$$\mathbb{P}(B) \neq 0 \qquad \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} = \boxed{0}$$

$= \mathbb{P}(\emptyset)$?

$$\mathbb{P}(A|B) = 0$$

¿ $\mathbb{P}(B) = 0$?

A = medir 180

B = medir 181

$$\frac{\mathbb{P}(B) = 0}{\boxed{\mathbb{P}(A|B) = 0}}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

$$0 = 0 \cdot 0$$

$A \cap B \subseteq B$, entonces, si $\mathbb{P}(B) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$

Por otro lado $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

2) A, B independientes
B, C independientes

$\Rightarrow A, C$ ¿independientes sí o sí?

Ejemplos: $C = A$, $C = A^c$

A y A no son independientes si $\mathbb{P}(A) \in (0,1)$

$\underline{\mathbb{P}(A)} = \underline{\mathbb{P}(A \cap A)} \overset{?}{=} \underline{\mathbb{P}(A)^2}$

$\frac{1}{2} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2}$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

o $\mathbb{P}(A) = 1$ No es el caso

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$$

$x = \mathbb{P}(A)$

$x = x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1) =$

$\Leftrightarrow x = 0$

o $x = 1$

1) $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$

a) A, B independientes:

$(\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \mathbb{P}(B) - \frac{1}{4} \cdot \mathbb{P}(B)$$

b) $A \cap B = \emptyset$:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \mathbb{P}(B)$$

c) $A \subseteq B$:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$$

$$\frac{1}{3} = \mathbb{P}(B)$$

Ejercicio 6 :

1. Tres jugadores tiran al blanco. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $1/6$, la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $1/4$ y la probabilidad de que el jugador 3 dé en el blanco es $1/3$. Cada uno dispara una vez.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?

   b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

2. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $1/4$ y la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $1/3$.

   a) Si cada uno dispara dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado por lo menos una vez?

   b) Supongamos ahora que cada uno dispara una vez. Dado que el blanco fue alcanzado solamente una vez, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

Ejercicio 7 : Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 50 %, 30 % y 20 % del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de producción de defectuosos de cada máquina son 3 %, 4 % y 5 % respectivamente. Se toma al azar un artículo de la producción total. Si el artículo seleccionado es defectuoso, hallar la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

Ejercicio 8 (Examen, marzo de 2003): Se admite que entre los jugadores profesionales de ping pong un 5 % consume anfetaminas antes de cada partido. Durante un campeonato se les toma una muestra de orina a todos los jugadores. La muestra de cada jugador se divide en dos submuestras iguales a las que se les aplica un análisis clínico: si el resultado de aplicar el análisis a las dos submuestras da positivo, el jugador es sancionado; en cualquier otro caso el jugador no es sancionado.

Considere los eventos:

$A_1 = \{$ el resultado de la primera submuestra es positivo $\}$

$A_2 = \{$ el resultado de la segunda submuestra es positivo $\}$

$B = \{$ el jugador es sancionado$\}$

$D = \{$ el jugador consumió anfetaminas $\}$

Se asume que los eventos A_1 y A_2 *condicionados* a los eventos D y a D^c son independientes, esto es: $P(A_1 \cap A_2|D) = P(A_1|D)P(A_2|D)$ y $P(A_1 \cap A_2|D^c) = P(A_1|D^c)P(A_2|D^c)$.

Se sabe además que $P(A_i|D) = 0{,}90$ y $P(A_i|D^c) = 0{,}02$ para $i = 1, 2$.

1. Calcule $P(D|A_1)$, esto es, la probabilidad de que un jugador haya consumido anfetaminas dado que el resultado de la primera submuestra es positivo.

8) $B = A_1 \cap A_2$

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}}$$

a)

$$\mathbb{P}(D|A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1|D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

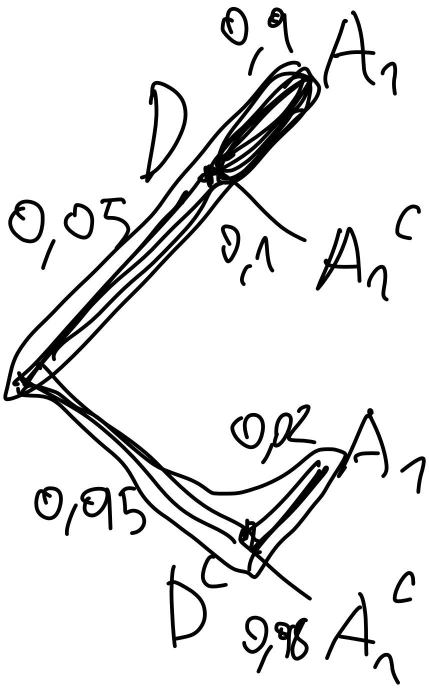
$$= \frac{0{,}90 \cdot 0{,}05}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{0{,}90 \cdot 0{,}05}{0{,}064}$$

$$= 0{,}71$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1|D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(A_1|D^c)\,\mathbb{P}(D^c)$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}02 \cdot 0{,}95$$

$$= \boxed{0{,}064}$$



$$\underline{(A_1 \cap D)} \cup \underline{(A_1 \cap D^c)} = A_1$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap D)}{\cancel{\mathbb{P}(D)}}\,\cancel{\mathbb{P}(D)} + \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap D^c)}{\cancel{\mathbb{P}(D^c)}}\,\cancel{\mathbb{P}(D^c)}$$

b) $\mathbb{P}(B)$?

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | D)}\, \mathbb{P}(D) \\
&\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | D^c)\, \mathbb{P}(D^c) \\
&= \mathbb{P}(A_1 | D)\, \mathbb{P}(A_2 | D)\, \mathbb{P}(D) \\
&\quad + \mathbb{P}(A_1 | D^c)\, \mathbb{P}(A_2 | D^c)\, \mathbb{P}(D^c) \\
&= 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}05 \\
&\quad + 0{,}02 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}95 \\
&= 0{,}041
\end{aligned}$$

A_1, A_2 no son independientes

c) $\mathbb{P}(\underbrace{D}_{\text{culpable}} \mid \underbrace{B}_{\text{sancionado}})$

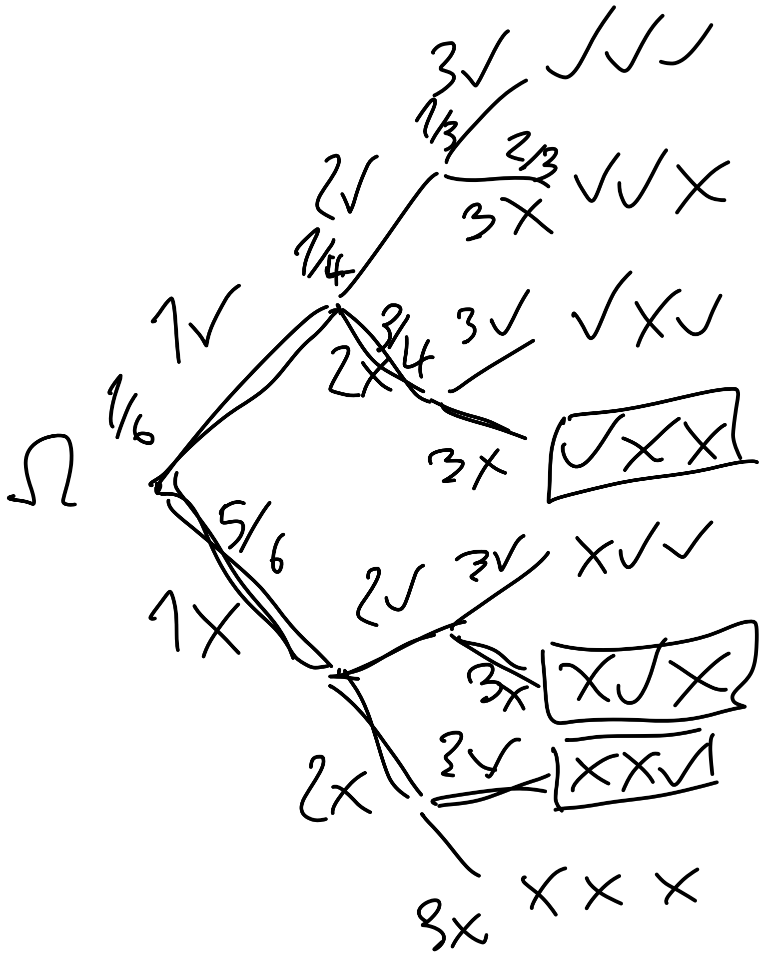
$$\mathbb{P}(D \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_1 \mid D)\,\mathbb{P}(A_2 \mid D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}04088}$$

$$= 0{,}99$$

a)



$$\mathbb{P}(\checkmark \cancel{X}XX) + \mathbb{P}(X\checkmark X) + \mathbb{P}(XX\checkmark)$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$$

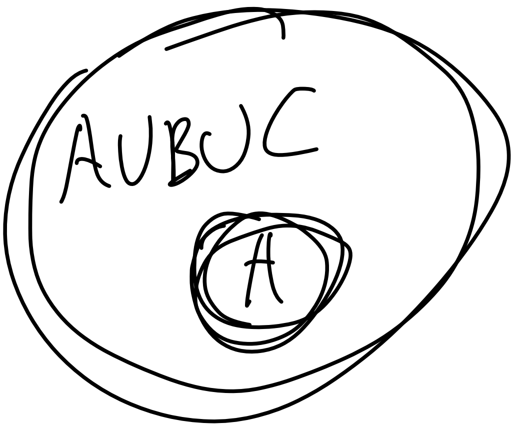
$$= \boxed{\frac{1}{12}} + \frac{5}{36} + \frac{15}{72} = \boxed{\frac{6}{72}} + \boxed{\frac{10}{72}} + \boxed{\frac{15}{72}}$$

$$= \boxed{\frac{31}{72}}$$

$$\mathbb{P}\Big(\overbrace{\checkmark\times\times}^{A} \,\Big|\, \overbrace{(\checkmark\times\times \cup \times\checkmark\times \cup \times\times\checkmark)}^{B}\Big)$$

$$= \frac{\overbrace{\mathbb{P}\big((\checkmark\times\times \cup \times\checkmark\times \cup \times\times\checkmark) \mid \checkmark\times\times\big)}^{=1}\,\mathbb{P}(\checkmark\times\times)}{\mathbb{P}(\checkmark\times\times \cup \times\checkmark\times \cup \times\times\checkmark)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\checkmark\times\times)}{\mathbb{P}(\checkmark\times\times \cup \times\checkmark\times \cup \times\times\checkmark)} = \frac{\frac{6}{72}}{\frac{31}{72}} = \boxed{\frac{6}{31}}$$



$A \subseteq A \cup B \cup C$

$\mathbb{P}(A \cup B \mid B) = 1$

En general: $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$ si $B \subseteq A$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

2. Calcule $P(B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sea sancionado. ¿Son A_1 y A_2 eventos independientes?

3. Calcule $P(D|B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sancionado haya consumido anfetaminas.

Ejercicio 9 (Examen, febrero 2004): De una caja que contiene 3 bolas rojas y 2 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 4 bolas azules y 2 rojas. A continuación se extrae una bola al azar de la segunda caja.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea roja?

3. Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

9)

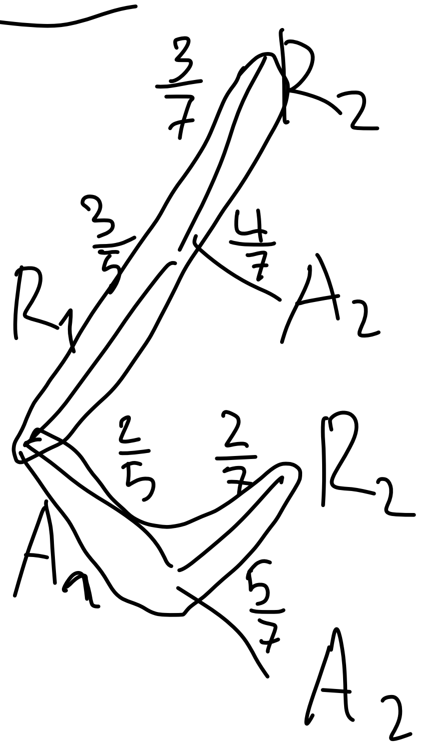
Ejercicio 9 (Examen, febrero 2004): De una caja que contiene 3 bolas rojas y 2 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 4 bolas azules y 2 rojas. A continuación se extrae una bola al azar de la segunda caja.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea roja?
3. Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

Caja 1: 3R, 2A — Caja 2: 2R, 4A → 3R, 4A

a) $\mathbb{P}(MB) = \dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \dfrac{1}{7}$

b) $\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_1)$



$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{5} = \boxed{\frac{13}{35}}$$

c) $\mathbb{P}(MB \mid R_2) = \dfrac{\mathbb{P}(R_2 \mid MB)\, \mathbb{P}(MB)}{\mathbb{P}(R_2)}$

$= \dfrac{\mathbb{P}(R_2 \mid MB) \cdot \frac{1}{7}}{\frac{13}{35}}$

$= \dfrac{\mathbb{P}(R_1)\, \frac{1}{7}}{\frac{13}{35}}$

$= \dfrac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{13}{35}} = \boxed{\dfrac{3}{13}}$

d) $\mathbb{P}(MB \mid A_2) = \dfrac{\mathbb{P}(A_2 \mid MB)\, \mathbb{P}(MB)}{\mathbb{P}(A_2)}$

$A_2 = R_2^C$

$= \dfrac{\mathbb{P}(R_2^C \mid MB)\, \mathbb{P}(MB)}{\mathbb{P}(R_2^C)}$

$$= \frac{\left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{7}}{\left(1 - \frac{13}{35}\right)} = \frac{2}{22} = \boxed{\frac{1}{11}}$$