Cálculo de probabilidades
Práctico 2

Ejercicio 1 : Determinar el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, y en el caso que sea finito indicar su cardinal. [1]

1. Lanzar al aire una moneda tres veces.
2. Extraer dos fichas sucesivamente y sin reposición de una bolsa que contiene fichas numeradas con los cinco dígitos pares.
3. Lanzar una moneda finalizando el experimento si sale número; si sale cara, tirar además un dado.
4. Seleccionar al azar dos alumnos de una clase de 30.
5. Valor de la tasa de inflación para este año.

Ejercicio 2 : En el Cinco de Oro hay que acertar cinco números, elegidos del 1 al 48.

1. Construir un espacio muestral para este experimento.
2. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?
3. ¿Cuál es la probabilidad de acertar en al menos tres números (es decir, acertar exactamente tres, exactamente cuatro, o exactamente cinco números)?

Ejercicio 3 : ¿Cuál es la probabilidad de sacar una flor derecha en el truco uruguayo? ¿y en el truco argentino?

Ejercicio 4 (parcial de abril del 2024): Se extraen simultáneamente tres bolillas de un bolillero que contiene los números del 1 al 20. Hallar la probabilidad de que no salgan los tres números consecutivos (sin importar el orden en que se observan).

Ejercicio 5 : Si a un ómnibus con n asientos suben i personas con $i \leq n$.

1. ¿De cuántas maneras pueden elegirse los asientos en los que se sentará la gente?
2. ¿De cuántas maneras distintas puede disponerse la gente en el ómnibus?
3. * Asumamos ahora que la gente se dispone al azar y que cada disposición particular tiene la misma probabilidad (equiprobabilidad). Supongamos que $n = 4m$ y que el ómnibus tiene un pasillo en el medio; y que a cada costado del pasillo hay m filas de dos asientos. Para darle un toque romántico, suponga ahora que sube al ómnibus Keanu Reeves o Angelina Jolie (según la opción de cada uno), ¿qué probabilidad tiene Ud. de quedar sentado al lado del personaje en cuestión?

[1] El cardinal de un conjunto finito es su cantidad de elementos, y se denota por card (A), $\#A$ o $|A|$.

3) $$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{Casos favorables}}{C^{40}_{3}} = \boxed{\frac{4 \cdot C^{10}_{3}}{C^{40}_{3}}}$$

Truco Argentino

Truco uruguayo?

A) $$\frac{C^{4}_{3} + 3C^{10}_{3}}{C^{40}_{3}}$$

B) $$\boxed{\frac{C^{4}_{3} + 3C^{10}_{3}}{C^{39}_{3}}}$$

C) $$\boxed{\frac{4 \cdot C^{10}_{3}}{C^{40}_{3}}}$$

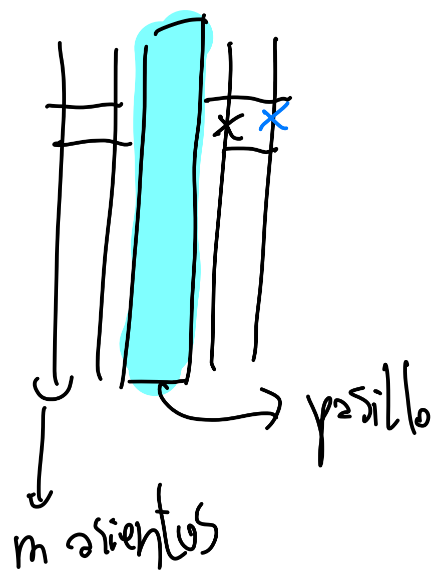
5) n asientos, i personas

$i \leq n$

a) C^n_i (no se pueden sentar más de uno por asiento y el orden no importa)

b) A^n_i (importa el orden)

c)



Caso favorable:

1

Casos posibles:

$n-1$

$\Rightarrow$ Probabilidad:

$$\frac{1}{n-1}$$

4) Juegos posibles: C^{20}_{3}

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{18}{C^{20}_{3}}$$

Bolillero tamaño $n \Rightarrow n-2$ casos favorables

$\boxed{\text{No valen } 20,1,2 \text{ ni } 19,20,1}$

Respuesta: $\frac{18}{C^{20}_{3}}$ (usar calculadora)

1) a) 3 monedas $\rightarrow$ 2 opciones: Cara
Número

$\Omega = \{CCC, CCN, CNC, CNN, NCC, NCN, NNC, NNN\}$

$|\Omega| = 2^3 = 8$

Ejercicio 6 : Calcular la probabilidad de obtener una suma de puntos menor que 18 al tirar tres dados.

Ejercicio 7 : * Se elige un grupo de n personas al azar. Descartando los años bisiestos y suponiendo por lo tanto años de 365 días, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas cumplan el mismo dia? ¿Cuánto tiene que ser n para que dicha probabilidad supere a 0.5?

Ejercicio 8 : Si un dado está cargado de modo tal que $\mathsf{P}(\{i\}) = \alpha i, \forall i = 1, 2, \ldots, 6$.

1. Determinar el valor de α.
2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar el número 5?
3. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par?

Ejercicio 9 : * Una persona ha escrito n cartas a n personas distintas y escribe las direcciones de estas en n sobres. ¿Cual es la probabilidad de que todas las cartas estén en sobres “incorrectos”, es decir, que no lleven la dirección que le corresponde a la carta que contienen?

1. Calcular la probabilidad para $n = 2, 3, 4$ y 10.
2. Calcular el límite de dicha probabilidad cuando n tiende a infinito.

Sugerencia: Utilice la fórmula de la parte (b) del Ejercicio 11 del Práctico 1, que dice que

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le n} \mathsf{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

---

6) $\Omega = \{ D_1 D_2 D_3 : D_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \}$

$|\Omega| = \text{Casos posibles} = 6^3$

$\text{Casos favorables} = 6^3 - 1$

$\Rightarrow \text{Probabilidad} = \dfrac{6^3-1}{6^3} = \dfrac{217}{218}$

Ejercicio 9 : * Una persona ha escrito n cartas a n personas distintas y escribe las direcciones de estas en n sobres. ¿Cual es la probabilidad de que todas las cartas estén en sobres "incorrectos", es decir, que no lleven la dirección que le corresponde a la carta que contienen?

1. Calcular la probabilidad para $n = 2, 3, 4$ y 10.
2. Calcular el límite de dicha probabilidad cuando n tiende a infinito.

Sugerencia: Utilice la fórmula de la parte (b) del Ejercicio 11 del Práctico 1, que dice que

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_n\leq n} \mathsf{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

9) b)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 4 & 3 & n & \ldots & 5 \end{matrix}$$

$\mathbb{P}$(Ningum dirección correcta)

$= 1 - \mathbb{P}$(Algum dirección correcta)

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)$
$- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap D) -$ etc.
$+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap C \cap D) + \mathbb{P}(B \cap C \cap D) +$ etc.
$- \mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D$

$\mathbb{P}$(Alguna dirección correcta)

$= \mathbb{P}$(Primer dirección correcta $\cup$ Segunda dirección correcta $\cup \ldots \cup$ enésima dirección correcta)

C_i = i-ésima dirección correcta

$\Rightarrow$ Quiero $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)$

$$\mathbb{P}(C_1) \stackrel{?}{=} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} = \mathbb{P}(C_i)$$

$$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} = \underbrace{\mathbb{P}(C_i \cap C_j)}_{\text{si } i \neq j}$$

Análogamente: $\mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_i) = \frac{(n-i)!}{n!}$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \frac{(n-k)!}{n!}$$

Formas de intersectar i sucesos de entre n posibles: C_i^n

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_k^n \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}$$

$$e^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\underbrace{-\sum \frac{(-1)^k}{k!}} = 1 - e^{-1} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \boxed{1 - e^{-1}}$$

$$\mathbb{P}(\text{Ninguna correcta}) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$
$$= \frac{1}{e}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}}$$

Ejercicio 8 : Si un dado está cargado de modo tal que $\mathsf{P}(\{i\}) = \alpha i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 6$.

1. Determinar el valor de α.
2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar el número 5?
3. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par?

a) α?

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \alpha 1$$
$$\mathbb{P}(\{2\}) = \alpha . 2$$
$$\mathbb{P}(\{3\}) = \alpha . 3$$
$$\mathbb{P}(\{4\}) = \alpha . 4$$
$$\mathbb{P}(\{5\}) = \alpha . 5$$
$$\mathbb{P}(\{6\}) = \alpha . 6$$

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 1$$

$$\alpha(1+2+3+4+5+6) = 1$$

$$21\alpha = 1$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{21}}$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \qquad \Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(3) + \text{etc.}$$

Deducimos $\alpha = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega)}{21}$

b) $\mathbb{P}(\{5\}) = \dfrac{5}{21} \; (= 5 \cdot \alpha)$

c) $\mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{12}{21}$

1

Ejercicio 7 : * Se elige un grupo de n personas al azar. Descartando los años bisiestos y suponiendo por lo tanto años de 365 días, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas cumplan el mismo dia? ~~¿Cuánto tiene que ser n para que dicha probabilidad supere a 0.5?~~

Queremos $\dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$

Casos posibles: 365^n

Casos favorables: $365^n - A_n^{365}$

1 2 ... 364 365

Casos no favorables: con orden sin reposición $\longrightarrow A_n^{365}$

$$\Rightarrow \text{Probabilidad} = \frac{365^n - A_n^{365}}{365^n} = \boxed{1 - \frac{A_n^{365}}{365^n}}$$

$$= 1 - \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$$