Conteo y Propiedades de la Probabilidad
Práctico 1

Ejercicio 1 : Usted se olvidó de la clave de su candado de tres dígitos (pueden ser repetidos) e intentar abrirlo probando todas las claves posibles. ¿Cuánto tiempo le llevará si cada prueba le insume tres segundos? ¿Cuánto tiempo le llevaría si el candado tuviera cuatro dígitos ?

Ejercicio 2 : Calcular la cantidad de matrículas que pueden hacerse en Uruguay[1] y calcular cuántas de ellas comienzan con P y terminan con 24.

Ejercicio 3 : De un grupo formado por tres ingenieros, cinco economistas y cuatro arquitectos deben seleccionarse cuatro para formar una comisión.

1. Calcular cuántas comisiones diferentes podrían formarse.
2. ¿cuántas de esas comisiones estarían integradas por un ingeniero, dos economistas y un arquitecto?
3. ¿En cuántas configuraciones hay por lo menos dos arquitectos?

Ejercicio 4 : En una fábrica los productos se codifican con tres letras distintas que indican tres operaciones que sufren cada uno de los productos y tres cifras distintas y en ese orden: primero las letras y después los números. Las letras utilizadas son A, B, C y D.

1. ¿Cuántos productos pueden codificarse?
2. ¿Cuántos códigos empiezan con A y terminan con 9?
3. ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos y en ese orden?
4. ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos?
5. ¿En cuántos productos aparecen dos números pares juntos y el otro es impar?

Ejercicio 5 : Se juega a un juego del tipo Cinco de Oro: hay que acertar cinco números, elegidos dentro de 36 posibilidades.

1. ¿Cuántas jugadas posibles hay?
2. Si se eligen cinco números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan exactamente uno de los números elegidos?
3. Si se eligen cinco números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan por lo menos dos de los números elegidos?

[1]Tres letras y cuatro dígitos.

Ejercicio 6 : * Usted va a la panadería a comprar una docena de bizcochos. En la panadería sólo quedan croissants, margaritas y galletas en cantidades suficientes.

1. ¿Cuántas elecciones distintas puede hacer? CR (combinaciones con repetición)
2. Usted llega a la facultad con α croissants, β margaritas y γ galletas ($\alpha + \beta + \gamma = 12$) y los reparte entre usted y 11 amigos. ¿de duántas formas los puede repartir? (Calcular en función de α, β y γ). ¿Cuánto deben valer α, β y γ para que dicha cantidad sea máxima? (Sugerencia: ver como varía dicha cantidad al variar en una unidad alguno de los parámetros) máximo: $\alpha = \beta = \gamma = 4$

Propiedades de la Probabilidad

Ejercicio 7 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Sean A, B y C sucesos. Expresar mediante operaciones con conjuntos los sucesos que corresponden a:

1. Ocurren A y B.
2. Ocurren los tres sucesos.
3. Ocurre A u ocurre B.
4. Ocurre por lo menos uno de los tres sucesos.
5. Ocurre A u ocurre B pero no los dos simultáneamente.
6. No ocurre B.
7. No ocurre ni A ni B.
8. No ocurre ninguno de los tres sucesos.
9. Ocurre A y no ocurre B.
10. Ocurre exactamente uno de los tres sucesos.
11. Ocurren por lo menos dos de los tres sucesos.

Ejercicio 8 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

1. Si A y B son sucesos tales que $A \subset B$ entonces:

   $$\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$$

   Sugerencia. Considerar que $B \setminus A = B \cap A^c$ y $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

   Deducir que $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.
2. Si A y B son sucesos entonces $\mathsf{P}(A \cup B) \geq \max\{\mathsf{P}(A), \mathsf{P}(B)\}$ y $\mathsf{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathsf{P}(A), \mathsf{P}(B)\}$

Ejercicio 9 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran dos sucesos A y B tales que $\mathsf{P}(A) = 1/3$ y $\mathsf{P}(B) = 1/2$. Determinar el valor de $\mathsf{P}(B \setminus A)$ en los siguientes casos:

8) a) Probar $\mathbb{P}(B-A)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)$
si $A\subseteq B$

$B-A=B\cap A^{c}$

$B=(B\cap A)\cup(B\cap A^{c})$

$$\boxed{\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) \text{ si } A\cap B=\emptyset}$$

A porque $A\subseteq B$

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(B-A)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B-A)$$

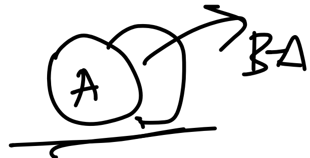
$$\iff \boxed{\mathbb{P}(B-A)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)}$$

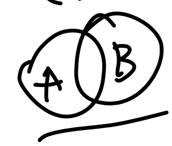
$$\iff \mathbb{P}(A)+\overbrace{\mathbb{P}(B-A)}^{\geq 0}=\mathbb{P}(B)$$

$\mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B)$ si $A\subseteq B$

$B-A=A^{c}\cap B$

b) $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$





Observación: $\underline{A \cup (B-A) = A \cup B}$

$\underline{A \cap (B-A) = \emptyset}$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B-A) \geq \mathbb{P}(A)$$

Análogamente:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A-B) \geq \mathbb{P}(B)$$

Entonces: $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$

como queríamos

Usando parte a):

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \\ B \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$$

$$A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

$$\left.\begin{aligned} A \cap B \subseteq A &\implies \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \\ A \cap B \subseteq B &\implies \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) \end{aligned}\right\} \implies \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$$

1. A y B incompatibles[2]
2. $A \subset B$.
3. $\mathsf{P}(A \cap B) = 1/8$.

Ejercicio 10 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran los sucesos A y B con: $\mathsf{P}(A) = 3/8$, $\mathsf{P}(B) = 1/2$, $\mathsf{P}(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

1. $\mathsf{P}(A^c)$ y $\mathsf{P}(B^c)$.
2. $\mathsf{P}(A \cup B)$.
3. $\mathsf{P}(A^c \cap B^c)$.
4. $\mathsf{P}(A^c \cap B)$ y $\mathsf{P}(A \cap B^c)$.

Ejercicio 11 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

1. * Si A, B y C son sucesos entonces se cumple que:

$$\mathsf{P}(A \cup B \cup C) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A \cap B) - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) + \mathsf{P}(A \cap B \cap C)$$

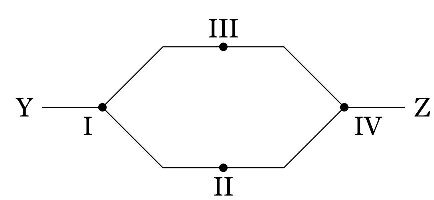
2. * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Ejercicio 12 : Un sistema de canalización de agua tiene cuatro compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

P(I abierta) $=$ P(II abierta) $=$ P(III abierta) $=$ P(I cerrada, III abierta) $= 0.3$,
P(IV abierta) $= 0.6$,
P(I cerrada, II abierta) $=$ P(I abierta, IV cerrada) $= 0.11$,
P(II abierta, IV abierta) $=$ P(III abierta, IV cerrada) $= 0.2$,

P(II abierta, III abierta) $= 0.00$,
P(I o II o IV abierta) $= 0.72$,
P(I o III o IV abierta) $= 0.91$.



Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.

[2] $A \cap B = \emptyset$.

11) a) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

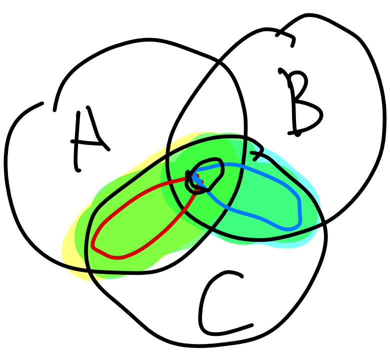
Podemos usar $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}((A \cup B) \cup C)$$

$$= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(\underline{(A \cup B) \cap C})$$

Observación: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



$$\mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Obs. 2: $\underline{(A \cap C) \cap (B \cap C)} = \boxed{A \cap B \cap C}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Reemplazando obtenemos el resultado

Ejercicio 12 : Un sistema de canalización de agua tiene cuatro compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

$\mathsf{P}\,(\text{I abierta}) = \mathsf{P}\,(\text{II abierta}) = \mathsf{P}\,(\text{III abierta}) = \mathsf{P}\,(\text{I cerrada, III abierta}) = 0.3,$

$\mathsf{P}\,(\text{IV abierta}) = 0.6,$

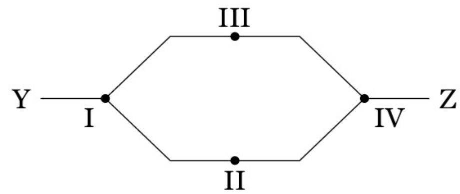
$\mathsf{P}\,(\text{I cerrada, II abierta}) = \mathsf{P}\,(\text{I abierta, IV cerrada}) = 0.11,$

$\mathsf{P}\,(\text{II abierta, IV abierta}) = \mathsf{P}\,(\text{III abierta, IV cerrada}) = 0.2,$

$\mathsf{P}\,(\text{II abierta, III abierta}) = 0.00,$

$\mathsf{P}\,(\text{I o II o IV abierta}) = 0.72,$

$\mathsf{P}\,(\text{I o III o IV abierta}) = 0.91.$



Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.

Queremos $(\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{II}\checkmark \cap \mathrm{IV}\checkmark) \cup \underline{(\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{III}\checkmark \cap \mathrm{IV}\checkmark)}$

$\checkmark$ abierta

$\times$ cerrada

Notar: $\mathbb{P}(\mathrm{II}\checkmark \cap \mathrm{III}\checkmark) = 0$ por hipótesis

$\Rightarrow$ Queremos $\underline{\mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{II}\checkmark \cap \mathrm{IV}\checkmark)} + \underline{\mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{III}\checkmark \cap \mathrm{IV}\checkmark)}$

$(\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{II}\checkmark \cap \mathrm{IV}\checkmark) \cap (\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{III}\checkmark \cap \mathrm{IV}\checkmark) = \underline{\underline{\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{II}\checkmark \cap \mathrm{III}\checkmark \cap \mathrm{IV}\checkmark}}$

$\subseteq \mathrm{II}\checkmark \cap \mathrm{III}\checkmark$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{II}\checkmark \cap \mathrm{III}\checkmark \cap \mathrm{IV}\checkmark) = 0$

$$\cancel{\mathbb{P}(I\checkmark \cup II\checkmark \cup IV\checkmark)} = \cancel{\mathbb{P}(I\checkmark)} + \cancel{\mathbb{P}(II\checkmark)} + \cancel{\mathbb{P}(IV\checkmark)}$$

$$- \cancel{\mathbb{P}(I\checkmark \cap II\checkmark)} - \cancel{\mathbb{P}(I\checkmark \cap IV\checkmark)} - \cancel{\mathbb{P}(II\checkmark \cap IV\checkmark)}$$

$$+ \mathbb{P}(I\checkmark \cap I\checkmark \cap IV\checkmark)$$

$$0{,}72 = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}6$$

$$- 0{,}19 - 0{,}19 \qquad -0{,}2$$

$$+ \mathbb{P}(I\checkmark \cap II\checkmark \cap IV\checkmark)$$

$\underline{\mathbb{P}(I\checkmark \cap II\checkmark)?}$ $\qquad \mathbb{P}(I\times \cap II\checkmark) = 0{,}11$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \underline{\mathbb{P}(A^c \cap B)}}$$

$A = I\checkmark$ $\qquad$ Notar: $(\underline{I\checkmark})^c = \underline{I\times}$

$B = II\checkmark$

$$\mathbb{P}(II\checkmark) = \mathbb{P}(I\checkmark \cap II\checkmark) + \mathbb{P}(I\times \cap II\checkmark)$$

$$0{,}3 = \mathbb{P}(I\checkmark \cap II\checkmark) + 0{,}11$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(I\checkmark \cap II\checkmark) = 0{,}19$$

$\mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \underline{\mathrm{IV}} \times) = 0{,}11$

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark) = \mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \underline{\mathrm{IV}}\checkmark) + \mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \underline{\mathrm{IV}}\times)$$

$$0{,}3 = \mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \underline{\mathrm{IV}}\checkmark) + 0{,}11$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \underline{\mathrm{IV}}\checkmark) = 0{,}19$$

$$0{,}72 = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}19 - 0{,}19 - 0{,}2 + \mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{II}\checkmark \cap \underline{\mathrm{IV}}\checkmark)$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}\checkmark \cap \mathrm{II}\checkmark \cap \underline{\mathrm{IV}}\checkmark) = 0{,}72 - 0{,}3 - 0{,}3 - 0{,}6 + 0{,}19 + 0{,}19 + 0{,}2 = \underline{0{,}1}$$

Ejercicio 13 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad.

1. Mostrar que si A y B son sucesos entonces:

$$\mathsf{P}(A \cup B) \leq \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

$$= P(A) + P(B) \cancel{- P(A \cap B)}$$

2. Deducir que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son sucesos entonces:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \mathsf{P}(A_n)$$

$$\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A_n\right)^c$$

3. * Demostrar que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de sucesos se cumplen:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N} \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \quad \text{y que} \quad \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N} \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

   Sugerencia: aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad.

4. Deducir que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de sucesos entonces:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$$

5. Deducir por último que si $\mathsf{P}(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.