Ejercicio 4
Se consideran 16 mediciones de una cierta concentración. Puede suponerse que las mediciones $X_1, \ldots, X_{16}$ siguen el modelo: $X_i = \mu + e_i$, donde $e_1, \ldots, e_{16}$ $iid \sim N(0, \sigma^2)$.

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1

1. Si la muestra es:

0.50	0.38	0.61	0.44	0.53	0.42	0.43	0.47
0.58	0.36	0.55	0.51	0.57	0.59	0.46	0.48

Hallar un intervalo de confianza 95 % para μ.

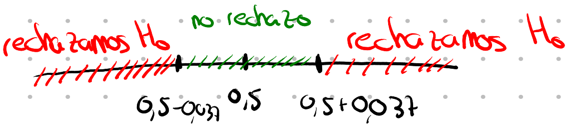
2. Se quiere probar la hipótesis de que $\mu = 0{,}50$. ¿Cuál es su decisión para $\alpha = 0{,}05$?

3. Para la prueba anterior calcule el p-valor α^*. ¿Cuál es su decisión final? ¿Puede determinar la probabilidad de error en su decisión?

2. $\begin{cases} H_0 : \mu = 0{,}5 \\ H_1 : \mu \neq 0{,}5 \end{cases}$

tamaño de la muestra n = 16

RC :



$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad RC = \left\{ |\overline{X}_n - \mu_0| \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2, n-1} \right\}$$

$$RC = \left\{ |\overline{X}_n - 0{,}5| \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2, n-1} \right\}$$

$\alpha = 0{,}05$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n\overline{X}_n^2 \right)$$

$n = 16$

$\overline{X}_n = 0{,}4925$

$S_n = 0{,}07$

$\alpha = 0{,}05 \rightsquigarrow t_{0{,}025}(15) = 2{,}131$

	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.
r	$t_{0.40}(r)$	$t_{0.25}(r)$	$t_{0.10}(r)$	$t_{0.05}(r)$	$t_{0.025}(r)$	$t_{0.0}$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.
15	0.258	0.691	1.341	1.753	$\boxed{2.131}$	2.

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) = \frac{0{,}07}{\sqrt{16}} 2{,}131 = 0{,}037$$

$$RC = \{ |\bar{X}_n - 0{,}5| \geq 0{,}037 \}$$

$\sigma \leftarrow$ desvío

$\sigma^2 \leftarrow$ varianza

$$= \{ \bar{X}_n \leq \underbrace{0{,}5 - 0{,}037}_{0{,}463} \text{ ó } \bar{X}_n \geq 0{,}5 + 0{,}037 \}$$

como el promedio muestral es $\bar{X}_n = 0{,}4925$

$\bar{X}_n \notin RC$ entonces no rechazamos H_0.

3. Vamos a calcular el p-valor:

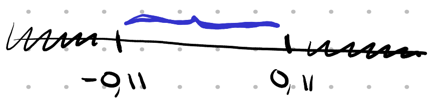
$$RC = \{ |\bar{X}_n - 0{,}5| \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \}$$

$$= \{ \frac{|\bar{X}_n - 0{,}5|}{S_n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \}$$

sea $T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{|\bar{X}_n - 0{,}5|}{S_n}$

valor observado de T

$$t_0 = \frac{|0{,}4925 - 0{,}5|}{0{,}07} = 0{,}11$$



$$\text{p-valor} = P_{H_0}(T \geq t_0) = P_{H_0}(T \geq 0{,}11) = P_{H_0}\left(\frac{|\bar{X}_n - 0{,}5|}{S_n} \geq 0{,}11 \right)$$

como suponemos que H_0 es cierta:

$X \sim \mathcal{N}(0{,}5, \sigma^2)$

$\uparrow$ desconocido

$$= 1 - P_{H_0}\left(-0{,}11 \leq \frac{\bar{X}_n - 0{,}5}{S_n} \leq 0{,}11 \right)$$

$$= 1 - P_{H_0}\left(\underbrace{-0{,}11\sqrt{16}}_{-0{,}44} \leq \frac{\bar{X}_n - 0{,}5}{S_n}\sqrt{16} \leq \overbrace{0{,}11\sqrt{16}}^{0{,}44} \right)$$

T-student con 15 grados de libertad

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$

$P_{H_0}(a \leq \text{T-student} \leq b)$

$= F_T(b) - F_T(a)$

$$= 1 - (F_T(0{,}44) - F_T(-0{,}44))$$

$$= 1 - (F_T(0{,}44) - (1 - F_T(0{,}44)))$$

$$= 2 - 2F_T(0{,}44)$$

$$= 2 - 2 \cdot 0{,}6669 \leftarrow \text{otra tabla de T-student}$$

$= 0{,}6662$

si $\alpha < 0{,}6662$ no rechazamos H_0

2022 1er Semestre

Ejercicio 5

Sea $X_1, \dots, X_n$ un muestreo aleatorio de una distribución discreta con recorrido $\{0,1,2,3\}$. Supongamos que el parámetro θ solo puede tomar los valores $\theta = 0,1,2,3,4$. La función de probabilidad puntual para cada θ es:

	$\theta=0$	$\theta=1$	$\theta=2$	$\theta=3$	$\theta=4$
$X=0$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2
$X=1$	0.3	0.4	0.3	0.5	0.3
$X=2$	0.3	0.3	0.2	0.1	0.4
$X=3$	0.3	0.1	0.2	0.3	0.1

Se tiene una muestra con $n = 6$ y los datos son 1, 1, 0, 3, 1, 1.

Hallar la estimación de máxima verosimilitud de θ.

(A) $\hat{\theta} = 0$ **(B)** $\hat{\theta} = 1$ **(C)** $\hat{\theta} = 2$ **(D)** $\hat{\theta} = 3$ **(E)** $\hat{\theta} = 4$

X variable discreta

$Rec(X) = \{0,1,2,3\}$

p_X depende de θ

el estimador de θ por maxima verosimilitud maximiza la probabilidad de que ocurra lo observado

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 3, X_5 = 1, X_6 = 1) \qquad L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i)$$

$$= P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 1)\, P(X_3 = 0)\, P(X_4 = 3)\, P(X_5 = 1)\, P(X_6 = 1)$$

$$= p_X(1)\, p_X(1)\, p_X(0)\, p_X(3)\, p_X(1)\, p_X(1)$$

$$= \underbrace{p_X(1)^4\, p_X(0)\, p_X(3)}_{\text{función de verosimilitud}}$$

* si $\theta = 0$:

$$L(\theta) = p_X(1)^4\, p_X(0)\, p_X(3) = 0{,}3^4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}000243$$

* si $\theta = 1$

$$L(\theta) = 0{,}4^4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}000512$$

* si $\theta = 2$

$$L(\theta) = 0{,}3^4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}000486$$

* si $\theta = 3$

$$L(\theta) = 0{,}5^4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}001875 \leftarrow \hat{\theta} = 3$$

* si $\theta = 4$

$L(\theta) = 0{,}3^4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}000162$

Ejercicio 8 Segundo Parcial 2022

La cantidad de barcos que pasan por día por debajo de determinado puente al acercarse al puerto es modelada por una variable Poisson(λ). Algunos ingenieros sostienen que $\lambda = 12$ mientras otros sostienen que $\lambda = 15$.

Se plantea el test de hipótesis $H_0 : \lambda = 12$ versus $H_1 : \lambda > 12$ al nivel de significación del 1%. Se realizó una muestra de 30 días en donde se observó que pasaron un total de 396 barcos por dicho puente.

Sea p_0 al p-valor de la prueba y π la potencia de la prueba sabiendo que el verdadero valor es $\lambda = 15$. Indicar el valor de p_0 y π.

(A) $p_0 \cong 0.029$ y $\pi \cong 0.015$

(B) $p_0 \cong 0.029$ y $\pi \cong 0.689$

(C) $p_0 \cong 0.029$ y $\pi \cong 0.985$

(D) $p_0 \cong 0.364$ y $\pi \cong 0.950$

(E) $p_0 \cong 0.364$ y $\pi \cong 0.243$

X = cantidad de barcos que pasan en 1 día

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

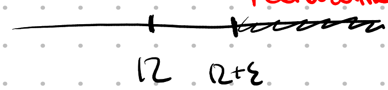
$E(X) = \lambda$

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = 12 \\ H_1 : \lambda > 12 \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}01$$

$X_1, \dots, X_{30}$ MAS de X $\qquad X_1 + X_2 + \dots + X_{30} = 396$

rechazamos H_0 si $\overline{X}_n \geq 12 + \varepsilon$

RC :



$RC = \{ \overline{X}_n \geq 12 + \varepsilon \}$

$$H_0 \; : \; \mu \leq \mu_0$$
$$H_1 \; : \; \mu > \mu_0$$

$$RC = \left\{ \overline{X}_n \geq \underbrace{\overset{12}{\mu_0} + \frac{\overset{\sqrt{12}}{S_n}}{\sqrt{n}} z_\alpha}_{\text{no depende de la muestra}} \right\}$$

$T = \overline{X}_n$

$t_0 = \frac{396}{30} = 13{,}2$

$* \text{ p-valor} = P_{H_0}(T \geq t_0) = P_{H_0}(\overline{X}_n \geq 13{,}2) = P_{H_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X}_n - 12}{\sqrt{12}} \sqrt{30}}_{\mathcal{N}(0,1)} \geq \frac{13{,}2 - 12}{\sqrt{12}} \sqrt{30} \right)$

como suponemos que H_0 es cierta:

$\lambda = 12$

$X \sim \text{Poisson}(12)$

$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(12, \frac{12}{30})$

$n = 30$

$= 1 - \phi\left(\frac{13{,}2 - 12}{\sqrt{12}} \sqrt{30} \right)$

$= 1 - \phi(1{,}89)$

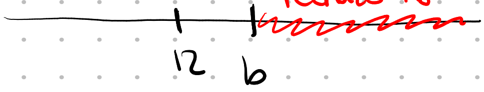
$= 0{,}0294$

$\boxed{\text{p-valor} = 0{,}029}$ $\Rightarrow$ no rechazamos H_0 si $\alpha < 0{,}029$

$*$ potencia sabiendo que el valor real de λ es 15

$RC = \{ \overline{X}_n \geq b \}$

rechazo H_0 si $\overline{X}_n \geq b$



prueba con nivel de significación $\alpha = 0{,}01$

$$0{,}01 = P_{H_0}(\text{rechazar } H_0)$$

$$= P_{H_0}(\overline{X}_n \geq b)$$

como suponemos que H_0 es cierta:
$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(12, \frac{12}{30}\right)$

$$= P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}_n - 12}{\sqrt{12}}\sqrt{30} \geq \frac{b-12}{\sqrt{12}}\sqrt{30}\right)$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{b-12}{\sqrt{12}}\sqrt{30}\right)$$

$$0{,}01 = 1 - \phi\left(\frac{b-12}{\sqrt{12}}\sqrt{30}\right)$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{b-12}{\sqrt{12}}\sqrt{30}\right) = 0{,}99$$

$$\Rightarrow \frac{b-12}{\sqrt{12}}\sqrt{30} = \phi^{-1}(0{,}99) = 2{,}325$$

$$\Rightarrow b = 2{,}325\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{30}} + 12 = 13{,}47$$

$RC = \{\overline{X}_n \geq 13{,}47\}$ promedio muestral: $\overline{X}_n = \frac{396}{30} = 13{,}2$

$\Rightarrow$ no rechazamos H_0 para $\alpha = 0{,}01$

$$\text{potencia} = P_{H_1}(\overline{X}_n \geq 13{,}47)$$

$$\begin{cases} H_0: \lambda = 12 \\ H_1: \lambda > 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \lambda = 12 \\ H_1: \lambda = 15 \end{cases}$$

valor real de λ es 15

$$\text{potencia} = P_{H_1}(\overline{X}_n \geq 13{,}47) = P_{H_1}\left(\frac{\overline{X}_n - 15}{\sqrt{15}}\sqrt{30} \geq \overbrace{\frac{13{,}47-15}{\sqrt{15}}\sqrt{30}}^{-2{,}16}\right)$$

como suponemos H_1: $\lambda = 15$
$X \sim \text{Poisson}(15)$
$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(15, \frac{15}{30}\right)$

$$= 1 - \phi(-2{,}16)$$

$$= 1 - (1 - \phi(2{,}16))$$

$$= \phi(2{,}16) = 0{,}9846$$

7.3 Población Bernoulli

$X_1, X_2, ..., X_n$ MAS de $X \sim$Ber(p) con n grande, las regiones críticas son aproximadas por aplicación del TCL.

- $$H_0 : p \leq p_0 \qquad H_1 : p > p_0 \qquad RC = \left\{ \overline{X}_n \geq \underbrace{p_0 + \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} z_\alpha}_{\text{no depende de la muestra}} \right\}$$

  $RC = \{ \overline{X}_n \geq C \}$

- $$H_0 : p \geq p_0 \qquad H_1 : p < p_0 \qquad RC = \left\{ \overline{X}_n \leq p_0 - \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} z_\alpha \right\}$$

- $$H_0 : p = p_0 \qquad H_1 : p \neq p_0 \qquad RC = \left\{ |\overline{X}_n - p_0| \geq \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right\}$$

Ejercicio 2

El campeón mundial de arquería afirma que acierta en el blanco al menos en el 83% de las veces. Pero yo creo que me está mintiendo, y quiero testear la hipótesis H_0 de que esté diciendo la verdad. Si lanza ante mí 900 veces y trabajamos a un nivel de significación del 1% ¿a partir de cuántos aciertos debería obtener para que me convenza de que dice la verdad?

(A) 636 **(B)** 598 **(C)** 721 **(D)** 681 **(E)** 794

$X \sim Ber(p)$ p = probabilidad de que acierte

$$\begin{cases} H_0: p \geq 0{,}83 \\ H_1: p < 0{,}83 \end{cases}$$

Ejercicio 3

En una fábrica de artefactos eléctricos se desea estimar el valor esperado de la variable X definida como el número de artefactos a ser observados hasta que aparezca el primero fallado. A tales efectos se realizará una muestra aleatoria simple de tamaño n de la variable X. De estudios previos, se sabe que si p es la probabilidad de que un artículo observado al azar sea fallado, entonces $0.2 \leq p \leq 0.4$.

A partir de la desigualdad de Chevishoff se desea obtener el menor tamaño de muestra posible tal que la media muestral no difiera de la verdadera en más de 0.1 con una confianza de al menos 92%. Entonces el mínimo n buscado es igual a

(A) 383 **(B)** 1535 **(C)** 3035 **(D)** 4688 **(E)** 25000

X = numero de artefactos a observar hasta el primero fallado

$X \sim Geo(p)$ donde p es la probabilidad de que un articulo observado este fallado

sabemos $0{,}2 < p < 0{,}4$

$E(X) = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$P(|\overline{X}_n - \frac{1}{p}| < 0{,}1) \geq 0{,}92 \quad \leftrightarrow \quad P(|\overline{X}_n - \frac{1}{p}| > 0{,}1) \leq 0{,}08$

Chebyshev : $P(|Y - E(Y)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(Y)}{\varepsilon^2}$

Y variable aleatoria

$$P(|\overline{X}_n - \tfrac{1}{p}| > 0{,}1) \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{0{,}1^2} = \frac{1-p}{0{,}1^2 p^2 n}$$

buscamos n tal que

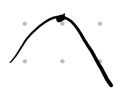
$$\frac{1-p}{p^2\, 0{,}1^2\, n} \leq 0{,}08$$

$$\frac{1-p}{p^2} \leq 0{,}08 \cdot 0{,}1^2\, n$$

$$\boxed{\frac{1-p}{p^2} \leq 0{,}0008\, n}$$

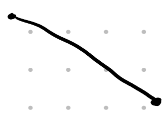
esto tiene que verificarse para cualquier p entre 0,2 y 0,4

queremos el valor maximo de $\frac{1-p}{p^2}$ si $p \in [0{,}2 , 0{,}4]$



$$f(p) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$f'(p) = \frac{-p^2 - (1-p)2p}{p^4} = \frac{(p-2)}{p^3} < 0 \text{ si } p \in [0{,}2 , 0{,}4]$$



$$f(0{,}4) \leq f(p) \leq \underbrace{f(0{,}2)} \text{ si } p \in [0{,}2 ; 0{,}4]$$

$$\frac{1-0{,}2}{0{,}2^2} \leq 0{,}0008\, n$$

$25000 \leq n \rightsquigarrow$ el menor valor de n es 25 000

Ejercicio 4

Déborah Rodríguez corre rápido. Se asume que el tiempo en segundos que le lleva correr los 800 metros tiene distribución normal. Sus últimas 8 mediciones resultaron (en segundos):

123,74	124,97	121,46	128,05
124,11	124,63	126,09	123,83

Un intervalo de confianza al $\underbrace{80\%}_{=1-\alpha}$ para el tiempo medio (en segundos) en que Déborah recorre los 800 metros es

(A) $[122,74; 126,48]$

(B) $[123,65; 125,57]$

(C) $[122,12; 126,10]$

(D) $[124,01; 126,83]$

(E) $[123,25; 125,97]$

$\alpha = 0,2$

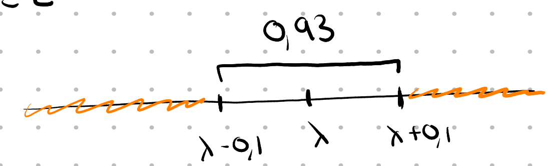
Segundo parcial 2021

Ejercicio 1

La cantidad de usuarios que ingresan por minuto a un canal web es una V.A. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, con $1 \leq \lambda \leq 2$ (definida en miles de usuarios). Se desea estimar λ a partir del promedio $\overline{X}_n$ de una muestra $X_1, X_2, ..., X_n$ i.i.d. de modo que con probabilidad de al menos 0.93 la distancia entre $\overline{X}_n$ y λ no supere los 100 usuarios. A partir de la desigualdad de Chevishoff, indicar el menor n natural que satisfaga la condición deseada.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $1 \leq \lambda \leq 2$

en miles de usuarios



$E(X) = \lambda \quad Var(X) = \lambda$

$$P(|\overline{X}_n - \lambda| < 0,1) \geq 0,93 \iff P(|\overline{X}_n - \lambda| > 0,1) \leq 0,07$$

Chebyshev: $P(|Y - E(Y)| > \varepsilon) \leq \dfrac{Var(Y)}{\varepsilon^2}$

$$P(|\overline{X}_n - \lambda| > 0,1) \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{0,1^2} = \frac{\lambda}{0,1^2 n}$$

buscamos n de forma que

$$\frac{\lambda}{0,1^2 n} \leq 0,07$$

$\lambda \leq 0{,}07 \cdot 0{,}1^2 n$

$\boxed{\lambda \leq 0{,}0007n}$ tiene que verificarse para todo λ con $1 \leq \lambda \leq 2$

$2 \leq 0{,}0007n$

$2857{,}14 \leq n \rightsquigarrow$ el menor n es 2858

Primer semestre 2019

Ejercicio 6 (5 puntos)

Una moneda tiene probabilidad de cara igual a θ. Se desea hacer el siguiente test de hipótesis sobre el valor de θ:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 0.4 \\ H_A : \theta = 0.7 \end{cases}$$

Para esto se la lanza 12 veces, y se usa como estadístico la cantidad de caras X.

A continuación se muestra la f.p.p. de una $\mathrm{Bin}(12, \theta)$ para los dos valores de θ:

Función de probabilidad puntual $p(x;\theta)$													
θ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.4	0.002	0.017	0.064	0.142	0.213	0.227	0.177	0.101	0.042	0.012	0.003	0.000	0.000
0.7	0.000	0.000	0.000	0.002	0.008	0.029	0.079	0.158	0.231	0.240	0.168	0.071	0.014

Se toma como región de rechazo $\{X \geq c\}$, en donde c es el menor entero entre 0 y 12 que cumple $P(X \geq c | H_0) \leq 0.1$.

Entonces, la potencia del test es:

(A) 0.057 **(C)** 0.010 **(E)** 0.276

(B) 0.900 **(D)** 0.724 **(F)** 0.158

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 0{,}4 \\ H_1 : \theta = 0{,}7 \end{cases}$$

Ejercicio 4 (7 puntos)

Se tiene la siguiente muestra de $n = 10$ datos que provienen de una variable aleatoria $U(0,\theta)$ con $\theta > 0$ desconocido.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3.46	4.96	4.72	4.21	1.06	2.58	2.92	4.85	0.21	0.91

Sea $\hat{\theta}$ el estimador por máxima verosimilitud de θ, entonces:

(A) $\hat{\theta} = 2.988$ **(C)** $\hat{\theta} = 0.21$ **(E)** $\hat{\theta} = 2.585$

(B) $\hat{\theta} = 4.96$ **(D)** $\hat{\theta} = 2.92$ **(F)** $\hat{\theta} = 3.46$

$X \sim U[0,\theta]$

$\hat{\theta}_n = \max\{X_1, \dots, X_{10}\}$

Ejercicio 7 (11 puntos)

En una fábrica embotelladora de agua mineral se utiliza una máquina para verter el líquido dentro de las botellas. La máquina vierte el líquido con un error aleatorio cuya distribución es normal de media cero y desvío conocido de 15 ml. En su funcionamiento correcto la máquina debe verter en promedio $\mu = \underbrace{1.5 \text{ litros}}_{1500 \text{ ml}}$ de agua en cada botella.

Para un control rutinario de calidad se desea tomar una muestra de n botellas, con el objetivo de ralizar el siguiente test de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1500 \text{ (ml)} \\ H_A : \mu < 1500 \text{ (ml)} \end{cases}$$

Se decide utilizar una región de rechazo de la forma $\{\bar{X} \leq 1500 - \varepsilon\}$, en donde $\bar{X}$ es el promedio de las n botellas, y un nivel de significancia $\alpha = 5\%$.

Suponga que la realidad es que la máquina está descalibrada y vierte en promedio $\mu = 1490$ ml. Hallar el valor de n para que la potencia del test anterior sea de 55%.

(A) 8 **(B)** 13 **(C)** 17 **(D)** 25 **(E)** 36 **(F)** 15

X = cantidad de líquido que vierte la máquina

$X = \mu + e_i \quad e_i \sim \mathcal{N}(0, 15^2)$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, 15^2)$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1500 \\ H_1 : \mu < 1500 \end{cases}$$

con $\alpha = 0{,}05$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \qquad RC = \left\{ \overline{X}_n \leq \mu_0 - \overbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha}^{\varepsilon} \right\}$$

$$RC = \left\{ \overline{X}_n \leq 1500 - \frac{15}{\sqrt{n}} z_{0{,}05} \right\}$$

$$z_{0{,}05} = 1{,}645$$

$$RC = \left\{ \overline{X}_n \leq 1500 - \frac{15}{\sqrt{n}} \cdot 1{,}645 \right\}$$

Si el valor real de μ es 1490 buscamos n de forma que la potencia de la prueba sea 55%.

$$\text{potencia} = P_{\boxed{H_1}}\left(\overline{X}_n \leq 1500 - \frac{15}{\sqrt{n}} \cdot 1{,}645 \right) = P_{H_1}\left(\frac{\overline{X}_n - 1490}{15}\sqrt{n} \leq \left(1500 - \frac{15}{\sqrt{n}} \cdot 1{,}645 - 1490\right) \cdot \frac{\sqrt{n}}{15} \right)$$

$\mu = 1490$

$X \sim \mathcal{N}(1490, 15^2)$

$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(1490, \frac{15^2}{n}\right)$

$$= P_{H_1}\left(\frac{\overline{X}_n - 1490}{15}\sqrt{n} \leq \left(10 - \frac{15}{\sqrt{n}} 1{,}645\right) \frac{\sqrt{n}}{15} \right)$$

$$= P_{H_1}\left(\underbrace{\frac{\overline{X}_n - 1490}{15}\sqrt{n}}_{\mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{10}{15}\sqrt{n} - 1{,}645 \right)$$

$$= \phi\left(\frac{10}{15}\sqrt{n} - 1{,}645 \right)$$

$$\text{potencia} \geq 0{,}55 \implies \phi\left(\frac{10}{15}\sqrt{n} - 1{,}645 \right) \geq 0{,}55$$

$$\implies \frac{10}{15}\sqrt{n} - 1{,}645 \geq 0{,}125$$

$$\implies \frac{10}{15}\sqrt{n} \geq 1{,}77$$

$$\implies \sqrt{n} \geq 2{,}655$$

$$\implies n \geq 7{,}04$$

$\implies$ el menor n es 8.

Ejercicio 4

Supongamos que 3.2, 2.1, 0.8, 1.2, 0.33 es una muestra aleatoria simple de cierta variable X tal que $X = \alpha + Y$ siendo $Y \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$. Entonces, la estimación de α y λ por el método de los momentos es:

(A) $\widehat{\alpha} = 0.507$ y $\widehat{\lambda} = 0.981$

(B) $\widehat{\alpha} = 0.595$ y $\widehat{\lambda} = 1.019$

(C) $\widehat{\alpha} = 1.526$ y $\widehat{\lambda} = 3.368$

(D) $\widehat{\alpha} = 1.526$ y $\widehat{\lambda} = 1.837$

(E) $\widehat{\alpha} = 2.577$ y $\widehat{\lambda} = -0.981$

$X = \alpha + Y$, $Y \sim Exp(\lambda)$ $\qquad E(X) = E(\alpha + Y) = E(\alpha) + E(Y) = \alpha + \frac{1}{\lambda}$

$\overline{X}_n \longrightarrow E(X)$

$\overline{X^2_n} \longrightarrow E(X^2)$