Ejercicio 3

En años recientes los granjeros suecos fumigaron sus campos sembrados de cereales con un fungicida que contenía metil de mercurio. Para tener una estimación del grado de contaminación inducido a productos comestibles, se realizó un estudio sobre el nivel de mercurio de los huevos producidos en Suecia. Para tal fin se tomó una muestra aletoria de 1600 huevos y se observó que 940 de ellos estaban contaminados (esto es, tenían un nivel de metil de mercurio superior al máximo tolerado). En lo que sigue, denotamos por p a la proporción de huevos contaminados.

a) Construya un intervalo de confianza 90 % aproximado para p.

b) Realice una prueba de hipótesis al nivel $\alpha = 0,10$ para decidir entre las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} H_0: & p = 0,6 \\ H_1: & p < 0,6 \end{cases}$$

c) Sabiendo que el verdadero valor de p es 0,55, calcule la potencia de la prueba.

b) $RC = \{\overline{X}_n \leq 0,5843\}$

c) potencia = P(rechazar H_0 cuando H_1 es cierta)

$= P_{H_1}(\text{rechazar } H_0)$

$= P_{H_1}(\overline{X}_n \leq 0,5843)$

sabemos que $p = 0,55$

$X \sim Ber(0,55)$

$E(X) = 0,55$

$Var(X) = 0,55(1-0,55) = 0,2475$

$\overline{X}_n \sim N\left(0,55, \frac{0,2475}{1600}\right)$

potencia $= P_{H_1}(\overline{X}_n \leq 0,5843)$

$$= P_{H_1}\left(\underbrace{\frac{\overline{X}_n - 0,55}{\sqrt{0,2475}}\sqrt{1600}}_{N(0,1)} \leq \frac{0,5843 - 0,55}{\sqrt{0,2475}}\sqrt{1600}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{0,5843 - 0,55}{\sqrt{0,2475}}\sqrt{1600}\right)$$

$= \phi(2,76)$

$= 0,9971$

potencia $= 0,9971$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.527
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.567
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.606
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.644
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.680
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.715
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.748
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.779
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.807
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.857
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.879
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.914
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.929
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.941
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.952
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.961
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.969
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.975
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.980
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.988
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.991
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.993
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.994
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.996
→ 2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	$\boxed{0.9971}$	0.997
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.997
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.998

Ejercicio 5
En 10 vacas afectadas por la tuberculosis se determinó el porcentaje de un cierto nutriente en la leche. Los resultados fueron los siguientes:

5,9   6,5   5,1   5,2   6,3   6,1   6,6   6,4   4,8   5,7

Si el porcentaje medio del nutriente en las vacas sanas es 6, asumiendo que los datos son normales, realice una prueba de hipótesis para estudiar si el porcentaje medio del nutriente en las vacas enfermas es más bajo que las vacas sanas.

X = porcentaje del nutriente en la leche (vacas enfermas)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ← desconocido

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 6 \\ H_1: & \mu < 6 \end{cases}$$

2. Caso σ^2 desconocido.

- $$\begin{aligned} H_0 &: \mu \leq \mu_0 \\ H_1 &: \mu > \mu_0 \end{aligned} \qquad RC = \left\{ \overline{X}_n \geq \mu_0 + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n-1} \right\}$$

- $$\left[\begin{aligned} H_0 &: \mu \geq \mu_0 \\ H_1 &: \mu < \mu_0 \end{aligned}\right. \qquad RC = \left\{ \overline{X}_n \leq \mu_0 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n-1} \right\}$$

La región crítica es de la forma

$$RC = \left\{ \overline{X}_n \leq 6 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\}$$

$\overline{X}_n = 5,86$

$S_n = \sqrt{0,407} = 0,63$

$n = 10$

elegimos $\alpha = 0,05$

$t_\alpha(n-1) = t_{0,05}(9) = 1,833$

r	$t_{0.40}(r)$	$t_{0.25}(r)$	$t_{0.10}(r)$	$t_{0.05}(r)$
1	0.325	1.000	3.078	6.314
2	0.289	0.816	1.886	2.920
3	0.277	0.765	1.638	2.353
4	0.271	0.741	1.533	2.132
5	0.267	0.727	1.476	2.015
6	0.265	0.718	1.440	1.943
7	0.263	0.711	1.415	1.895
8	0.262	0.706	1.397	1.860
9	0.261	0.703	1.383	$\boxed{1.833}$
10	0.260	0.700	1.372	1.812
11	0.260	0.697	1.363	1.796

$$6 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) = 6 - \frac{0,63}{\sqrt{10}} \cdot 1,833 = 5,63$$

Entonces para $\alpha = 0{,}05$:

$$RC = \{ \overline{X_n} \leq 5{,}63 \}$$

el promedio muestral es $5{,}86$ $\Rightarrow$ no rechazo H_0.

Otra forma de pensar este ejercicio

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \underbrace{\sigma^2}_{\text{desconocido}})$$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 6 \\ H_1: \mu < 6 \end{cases}$$

$$RC = \left\{ \overline{X_n} \leq 6 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\overline{X_n} - 6}{S_n} \leq -\frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\}$$

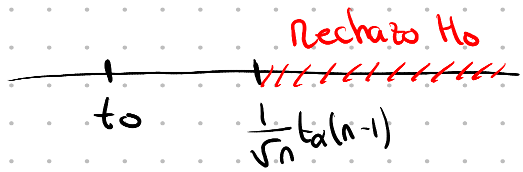
$$= \left\{ \underbrace{\frac{6 - \overline{X_n}}{S_n}}_{\text{depende de la muestra}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)}_{\text{no depende de la muestra}} \right\}$$

Sea $T(X_1, \dots, X_n) = \dfrac{6 - \overline{X_n}}{S_n}$

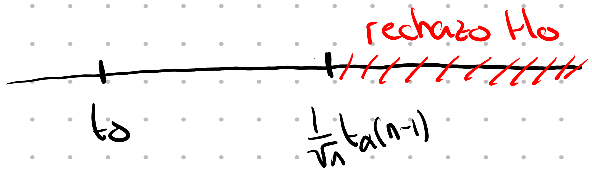
$t_0(x_1, \dots, x_n)$ = el valor observado de T

Lo que hacíamos hasta ahora:

1. elegimos α y calculamos $\frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$ (construimos la región crítica)
2. calcular t_0 a partir de la muestra y ver si cae en la región crítica o no



Ahora en vez de comparar t_0 y $\frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$ vamos a comparar la probabilidad de caer a la derecha si H_0 es cierta



$P_{H_0}\left(T \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right) = P(\text{rechazar } H_0 \text{ si } H_0 \text{ es cierta}) = \alpha$

---

dos tipos de error al hacer una prueba de hipótesis

* error de tipo I: rechazo H_0 cuando H_0 es cierta ←

  $\alpha = P_{H_0}(\text{rechazar } H_0)$

* error de tipo II: no rechazo H_0 cuando H_1 es cierta

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 6 \\ H_1: & \mu < 6 \end{cases}$$

$RC: \{\bar{X}_n \leq b\}$

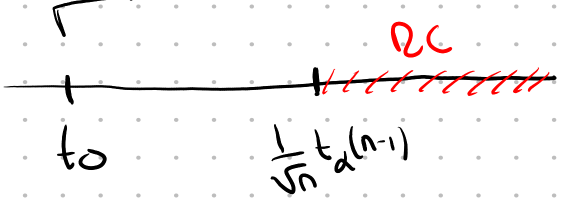
para calcular b planteamos

$P_{H_0}(\text{rechazar } H_0) = \alpha$

$$\Rightarrow \boxed{P_{H_0}(\bar{X}_n \leq b) = \alpha}$$

---

si suponemos que H_0 es cierta la probabilidad de caer acá es p-valor



$RC = \left\{T \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\}$

Si suponemos que H_0 es cierta la probabilidad de caer acá es α

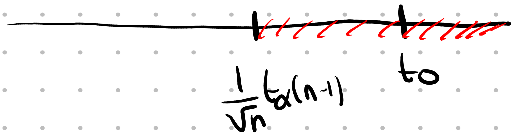
$$\alpha = P_{H_0}\left(T \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right)$$

$$\text{p-valor} = P_{H_0}(T \geq t_0)$$

$$\begin{cases} t_0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \iff \underbrace{P_{H_0}(T \geq t_0)}_{\text{p-valor}} \geq \underbrace{P_{H_0}\left(T \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right)}_{\alpha} \\ \text{no rechazamos } H_0 \iff \text{p-valor} \geq \alpha \end{cases}$$

$$t_0 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \iff P_{H_0}(T \geq t_0) \leq P_{H_0}\left(T \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right)$$

$$\text{rechazamos } H_0 \iff \text{p-valor} \leq \alpha$$



Entonces:

no rechazo $H_0 \iff$ p-valor $\geq \alpha$

rechazo $H_0 \iff$ p-valor $\leq \alpha$

Volviendo al ejercicio:

$$RC = \left\{ \frac{6 - \overline{X}_n}{S_n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 6 \\ H_1 : \mu < 6 \end{cases}$$

$$T = \frac{6 - \overline{X}_n}{S_n}$$

$$\overline{X}_n = 5{,}86 \qquad S_n = 0{,}63$$

el valor observado de T es: $t_0 = \dfrac{6 - 5{,}86}{0{,}63} = 0{,}22$

$$\text{p-valor} = P_{H_0}(T \geq t_0)$$

H_0 es cierta: $\mu = 6$ $X \sim \mathcal{N}(6, \sigma^2)$

$$= P_{H_0}\left(\frac{6-\overline{X}_n}{S_n} \geq 0{,}22 \right)$$

$$E(\overline{X}_n) = E(X) = \mu$$

$$Var(\overline{X}_n) = \frac{Var(X)}{n}$$

$$= P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}_n - 6}{S_n} \leq -0{,}22 \right)$$

$$= P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}_n - 6}{S_n}\sqrt{n} \leq -0{,}22\sqrt{n} \right)$$

$$= P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}_n - 6}{S_n}\sqrt{10} \leq -0{,}22\sqrt{10} \right)$$

T-student con 9 grados de libertad

$$= F_{T(9)}(-0{,}6957)$$

$$= 0{,}25209$$

p-valor = 0,25209

entonces H_0 no se rechaza para $\alpha < 0{,}25209$

P-VALOR PARA UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Dada una prueba de hipótesis cuya región crítica es de la forma

$$RC = \{ T(X_1, \dots, X_n) \geq c \}$$

donde $\begin{cases} T(X_1, \dots, X_n) \text{ depende de la muestra} \\ c \text{ no depende de la muestra} \end{cases}$

Si tenemos una muestra realizada $x_1, \dots, x_n$, el valor observado de T es

$$t_0 = T(x_1, \dots, x_n)$$

el p-valor: $P_{H_0}(T \geq t_0)$

Entonces: no rechazo $H_0 \Leftrightarrow$ p-valor $> \alpha$

rechazo $H_0 \Leftrightarrow$ p-valor $\leq \alpha$