Ejercicio 3

Una pieza de una máquina se verifica al final de cada hora de producción y se cambia por una nueva en caso de encontrarse rota. El tiempo de vida en horas de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro λ ($T \sim \exp(\lambda)$), por lo tanto el tiempo en horas que transcurre hasta el recambio de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria $X = [T] + 1$, donde $[T]$ es la parte entera de T (esto es, $X = n$ si y sólo si $n - 1 \leq T < n$).

1. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X y probar que tiene distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-\lambda}$ ($X \sim \text{Geo}(1 - e^{-\lambda})$).

2. A partir de los tiempos en los que se realiza el recambio de las piezas se desea estimar el parámetro λ del tiempo de vida de dichas piezas.

   a) Calcular λ en función de μ siendo $\mu = \mathbf{E}(X)$.

   b) ¿Cómo estimaría μ a partir de las observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de los tiempos de recambio de las piezas?

   c) Construir un estimador consistente para λ en función de las observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de los tiempos de recambio de las piezas.

tiempo de vida de la pieza: $T \sim \exp(\lambda)$

momento en que nos damos cuenta que la pieza está rota: $X = [T] + 1$

1. $X \sim Geo(1 - e^{-\lambda})$

2. * $\mu = E(X) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$

$$\mu = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow -\lambda = \log\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -\log\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)}$$

* estimador de $E(X)$ a partir de $X_1, \ldots, X_n$

$X \sim Geo(1 - e^{-\lambda})$

LFGN: $\overline{X_n} \xrightarrow{cs} E(X)$

entonces $\overline{X_n}$ es un estimador consistente de $E(X) = \mu$

* estimador de λ

$$\left.\begin{array}{l}\text{tenemos: } \lambda = -\log\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \\ \overline{X_n} \text{ estimador consistente de } \mu\end{array}\right\} \hat{\lambda}_n = -\log\left(1 - \frac{1}{\overline{X_n}}\right) \text{ es un estimador consistente de } \lambda$$

Estimador por máxima verosimilitud

X va

conocemos la distribución de X a menos de un parámetro θ

$X_1, \dots, X_n$ MAS de X

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ observaciones que realizamos

buscamos maximizar la probabilidad de observar los datos $(x_1, \dots, x_n)$

CASO DISCRETO

X tiene una fpp : $p_X(x, \theta) = P(X = x)$

$X_1, \dots, X_n$ MAS de X $\longrightarrow$ $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim X$

$(x_1, \dots, x_n)$ observaciones

función de verosimilitud:

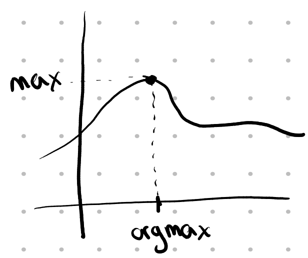
$$\begin{aligned}
L(\theta, x_1, \dots, x_n) &= \text{probabilidad de observar } (x_1, \dots, x_n) \\
&= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\
&= P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) \\
&= p_X(x_1, \theta) p_X(x_2, \theta) \cdots p_X(x_n, \theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i, \theta)
\end{aligned}$$

las X_i son independientes

$$\boxed{L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i, \theta)}$$

el estimador por máxima verosimilitud de θ es

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(\theta, x_1, \dots, x_n)$$



en la práctica vamos a buscar donde se maximiza

$$\ell(\theta, x_1, \dots, x_n) = \log(L(\theta, x_1, \dots, x_n))$$

CASO CONTINUO

X va con una función densidad $f_X(x, \theta)$

función de verosimilitud

$$\boxed{L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \theta)}$$

Ejercicios

(2) $X \sim P(\lambda)$

buscamos estimador por máxima verosimilitud de λ

$$P_X(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$X_1, \dots, X_n$ MAS de X

$(x_1, \dots, x_n)$ resultados observados.

* función de verosimilitud

$$\begin{aligned} L(\lambda) = L(\lambda, x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) \\ &= P_X(x_1, \lambda) P_X(x_2, \lambda) \cdots P_X(x_n, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P_X(x_i, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} \end{aligned}$$

$$\boxed{L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}}$$

* tomamos el logaritmo de la función de verosimilitud

$$\ell(\lambda) = \log(L(\lambda)) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)$$

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\log(e^{-\lambda}\lambda^{x_i}) - \log(x_i!)\right)$$

$\log(\lambda^{x_i}) = x_i \log(\lambda)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\log(e^{-\lambda}) + \log(\lambda^{x_i}) - \log(x_i!)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-\lambda + x_i\log(\lambda) - \log(x_i!)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!)$$

$$= -n\lambda + \log(\lambda)\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\log(x_i!)$$

$$\boxed{\ell(\lambda) = -n\lambda + \log(\lambda)\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\log(x_i!)}$$

* el estimador por maxima verosimilitud de λ es

$$\hat{\lambda} = \arg\max \ell(\lambda)$$

$$\ell'(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\ell'(\lambda) = 0 \Rightarrow -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = n$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\ell''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

entonces $\ell''\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{1}{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i} < 0$

Entonces ℓ alcanza un máximo en $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X_n}$

$\Rightarrow$ el estimador por máxima verosimilitud de λ es

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X_n}}$$

4) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

estimador por máxima verosimilitud de μ y σ^2

$$f_X(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$X_1, \dots, X_n$ MAS de X

$(x_1, \dots, x_n)$ resultados observados

* función de verosimilitud:

$$L(\mu, \sigma^2, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \mu, \sigma^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu)^2}{\sigma^2}} e^{\frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$\sqrt{2\pi}\,\sigma = \sqrt{2\pi\sigma^2} = (2\pi\sigma^2)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

* tomamos logaritmo de la función de verosimilitud

$$\ell(\mu,\sigma^2) = \log(L(\mu,\sigma^2))$$

$$= \log\left((2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\right)$$

$$= \log\left((2\pi\sigma^2)^{-n/2}\right) + \log\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i-\mu)^2}_{x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2}$$

* estimador por máxima verosimilitud de μ

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu)\cdot(-1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\mu\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu,\sigma^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \overline{X_n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ell(\overline{X_n},\sigma^2) < 0$$

$\Rightarrow \ell$ tiene un máximo en $\mu = \overline{X_n}$

$\Rightarrow$ el estimador por máxima verosimilitud de μ es

$$\hat{\mu} = \overline{X_n}$$

* estimador por máxima verosimilitud de σ^2

$$\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

derivada con respecto a σ^2 $\rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell(\mu,\sigma^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = n$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\right) + \frac{1}{2\sigma^2}\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) < 0$$

entonces $\ell(\mu,\sigma^2)$ alcanza un máximo cuando $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

$\Rightarrow$ el estimador por máxima verosimilitud de σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2$$