Convergencia casi segura

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sucesión de variables aleatorias, $a \in \mathbb{R}$

decimos que $X_n \xrightarrow{cs} a$ si $P(\{X_n \to a\}) = 1$

Ley fuerte de los grandes números

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variables iid (= independientes, identicamente distribuidas)

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\overline{X_n} \xrightarrow{cs} E(X_1)$$

Ejercicio 3

Este ejercicio describe el *método de Montecarlo* para el cálculo de integrales.

1. Sean $(U_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim \mathcal{U}[a,b]$ *iid* y $f \in R[a,b]$ (f es integrable Riemann en $[a,b]$), mostrar que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) \xrightarrow[n]{c.s.} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

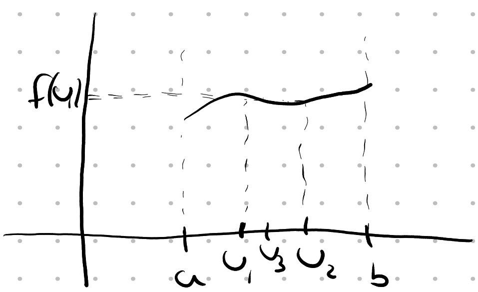
$(U_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim \mathcal{U}[a,b]$ independientes

$$f_{U_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

f función integrable Rieman en $[a,b]$

queremos ver que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) \xrightarrow{cs} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



definimos $Y_i = f(U_i)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y_n} \xrightarrow{cs} E(Y_1) \text{ por la LFGN}$$

vamos a calcular $E(Y_1)$:

$$E(Y_1) = E(f(U_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f_{U_1}(x)\, dx$$

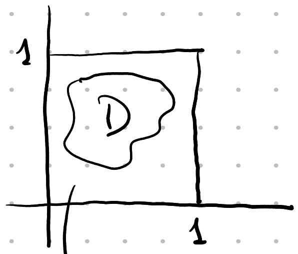
$$= \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}_n \xrightarrow{cs} E(Y_1) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

2. Sea D una región arbitraria de $[0,1] \times [0,1]$ y sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución $\mathcal{U}([0,1]\times[0,1])$, es decir que se cumple que $\mathbf{P}(U \in A) = \text{área}(A \cap [0,1]\times[0,1])$.

   Si $a_n = \dfrac{\#\{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ y } U_i \in D\}}{n}$ probar que $a_n \xrightarrow[n]{c.s.} \text{área}(D)$.



$U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim \mathcal{U}([0,1]\times[0,1])$

$$P(U_i \in A) = \frac{\text{area}(A \cap [0,1]\times[0,1])}{\text{area}([0,1]\times[0,1])} = \text{area}(A\cap[0,1]\times[0,1])$$

las $U_1, \ldots, U_n$ sortean n puntos en el cuadrado

$$a_n = \frac{\#\{i : 1 \leq i \leq n \text{ y } U_i \in D\}}{n}$$ → cuenta la cantidad de puntos que caen en D

queremos ver que $a_n \xrightarrow{cs} \text{area}(D)$

para aplicar la LFGN queremos ver a a_n como el promedio de una sucesión de variables aleatorias iid con esperanza igual a area(D)

$$a_n = \frac{\#\{i : 1 \leq i \leq n \text{ y } U_i \in D\}}{n}$$

Consideramos

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i \in D \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\underbrace{X_1 + X_2 + \dots + X_n}_{\substack{= \text{cantidad de} \\ \text{puntos que caen} \\ \text{en } D}} = \# \{ i : 1 \leq i \leq n \text{ y } U_i \in D \}$$

$$X \sim Ber(p)$$

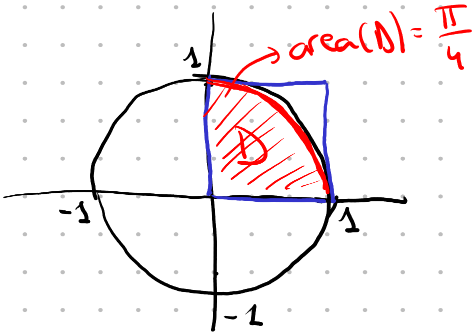
$$E(X) = 1p + 0(1-p) = p$$

$$X_i \sim Ber(\underbrace{P(U_i \in D)}_{= \text{area}(D)})$$

$$E(X_i) = \text{area}(D)$$

$$a_n = \frac{\# \{ i : 1 \leq i \leq n \text{ y } U_i \in D \}}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \overline{X_n} \xrightarrow[\uparrow \text{ por LFGN}]{cs} E(X_1) = \text{area}(D)$$

Aplicación: aproximación de π



Sorteamos puntos en $[0,1] \times [0,1]$

$$U_1, U_2, \dots, U_n \text{ iid } \sim \mathcal{U}([0,1] \times [0,1])$$

$$a_n = \frac{\{ i : 1 \leq i \leq n \text{ tales que } U_i \in D \}}{n} \xrightarrow{cs} \frac{\pi}{4}$$

$$4a_n \xrightarrow{cs} \pi$$

$\Rightarrow 4a_n$ es una aproximación de π

Ejercicio 6

Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ.

1. Hallar el límite casi seguro de $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i)^2$.
2. Hallar el límite casi seguro de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ iid } \sim \exp(\lambda)$$

1) $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \xrightarrow{cs} ?$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X_n} \xrightarrow{cs} E(X_1) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{por la LFGN}$$

Ejercicio 2

Demostrar que si $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} a$ e $Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} b$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua entonces

1. $X_n + Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} a + b$
2. $X_n Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} ab$
3. $g(X_n) \xrightarrow[n]{c.s.} g(a)$. $\leftarrow$

Consideramos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$

Como g es continua

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} \frac{1}{\lambda} \Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \xrightarrow{cs} g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \xrightarrow{cs} \frac{1}{\lambda^2}$$

2. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{cs} ?$

Consideramos $Y_i = X_i^2$ $\quad Y_j = X_j^2 \quad (Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y_n} \xrightarrow{cs} E(Y_1) = E(X_1^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$\uparrow$ por la LFGN

$X_1 \sim \exp(\lambda)$

$E(X_1) = \frac{1}{\lambda}$

$Var(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}$

$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$

$$\frac{1}{\lambda^2} = E(X_1^2) - \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow E(X_1^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ejercicio 4
Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables independientes e idénticamente distribuidas.
Suponga que $\mathbf{E}(X_1) = 0$ y sea $Y_i = \dfrac{X_i + X_{i+1}}{2}$.
Demostrar que $\overline{Y}_n \xrightarrow[n]{c.s.} 0$, aunque $Y_n,\ Y_{n+1}$ pueden ser dependientes para todo n.

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid

$E(X_1) = 0$

$Y_i = \dfrac{X_i + X_{i+1}}{2}$ queremos ver que $\overline{Y}_n \xrightarrow{cs} 0$

$\overline{X}_n \xrightarrow{cs} E(X_1) = 0$ por la LFGN

$$\overline{Y}_n \xrightarrow{cs} 0 \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{cs} 0$$
$$\iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + X_{i+1}}{2} \xrightarrow{cs} 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + X_{i+1}}{2} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} X_{i+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{i+1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} 0 \implies \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} 0$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i+1} \xrightarrow{cs} 0 \implies \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{i+1} \xrightarrow{cs} 0$$

Entonces $\underbrace{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{i+1}}_{\overline{Y}_n} \xrightarrow{cs} 0$

Ejercicio 5
Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de v.a. *iid* con $\mathbf{E}(X_1) = a > 0$. Probar que entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n]{c.s.} +\infty$$

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid

$E(X_1) = a > 0$

$Y_n \xrightarrow{cs} a$

queremos ver que $\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} +\infty$ $\iff P(\{Y_n \to a\}) = 1$

por la ley fuerte de los grandes números:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} a$$

$$\iff P\left(\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to a\right\}\right) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow a \neq 0 \end{array}\right] \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow +\infty$$

$$\underbrace{\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow a\right\}}_{\text{tiene probabilidad igual a 1 (LFGN)}} \subset \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow +\infty\right\}$$

entonces $P\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow +\infty\right\}\right) = 1$

por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} +\infty$