Ejercicio 4

Queremos jugar una vez por semana uno de estos juegos, con las siguientes reglas:

Jugaremos siempre una suma fija S,

Jugaremos siempre el mismo juego,

Las distintas jugadas son totalmente independientes, no hay influencia de una jugada en la otra

Jugaremos por un tiempo indefinido, muy largo.

¿Cuál de los juegos elegiría ud.? Al cabo de 1000 semanas, ¿cuánto estimaría usted que es la ganancia neta que se obtendría jugando siempre al primer juego? ¿Y al segundo?.

α = la suma que apostamos

X_{neta} = ganancia neta con el juego 1

$E(X_{neta}) = -0{,}84\alpha$

Y_{neta} = ganancia neta con el juego 2

$E(Y_{neta}) = -0{,}98\alpha$

estimación de la ganancia neta al jugar el juego 1 una vez por semana durante 1000 semanas

X^1_{neta} = ganancia neta de la semana 1 $\quad E(X^1_{neta}) = E(X_{neta})$

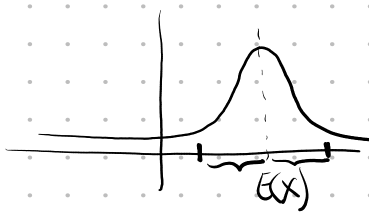
X^2_{neta} = ganancia neta de la semana 2

$\vdots$

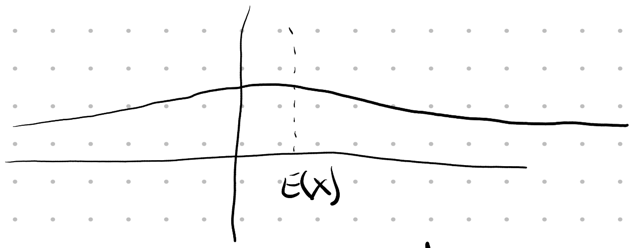
X^{1000}_{neta} = ganancia neta de la semana 1000

$$
\begin{aligned}
E(X^1_{neta} + X^2_{neta} + \dots + X^{1000}_{neta}) &= E(X^1_{neta}) + E(X^2_{neta}) + \dots + E(X^{1000}_{neta}) \\
&= E(X_{neta}) + E(X_{neta}) + \dots + E(X_{neta}) \\
&= 1000\, E(X_{neta}) \\
&= 1000(-0{,}84\alpha) \\
&= -840\alpha
\end{aligned}
$$

Varianza de una variable aleatoria



varianza pequeña



varianza grande

$$\boxed{Var(X) = E((X-E(X))^2)}$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(aX) = aE(X)$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E((X-E(X))^2) \\
&= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \quad \text{linealidad} \\
&= E(X^2) + E(-2X\overbrace{E(X)}^{\in\mathbb{R}}) + E(\overbrace{E(X)^2}^{\in\mathbb{R}}) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

Propiedades

* $Var(X) \geq 0$
* $Var(X) = 0 \iff$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(X=a) = 1$
* si X e Y independientes entonces $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$
* $Var(cX) = c^2 Var(X)$
* para calcular $E(X^2)$:

Si X variable aleatoria, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $E(g(X))$ es finita

$$E(g(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in R_X} g(x)\, p_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

$X: \quad R_X = \{-1, 1, 2\} \quad p_X$

$Y = X^2$

$R_Y = \{1, 4\}$

$$p_Y(1) = P(Y=1) = P(\{X=1\} \cup \{X=-1\})$$
$$= P(X=1) + P(X=-1)$$
$$= p_X(1) + p_X(-1)$$

$$\boxed{p_Y(1) = p_X(-1) + p_X(1)}$$

$$p_Y(4) = P(Y=4) = P(X=2) = p_X(2)$$

$$\boxed{p_Y(4) = p_X(2)}$$

$$E(Y) = 1\,p_Y(1) + 4\,p_Y(4)$$
$$= 1\,(p_X(-1) + p_X(1)) + 4\,p_X(2)$$
$$= 1\,p_X(-1) + 1\,p_X(1) + 4\,p_X(2)$$

$$E(X^2) = (-1)^2 p_X(-1) + 1^2 p_X(1) + 2^2 p_X(2)$$

Ejercicio 6

Calcular la esperanza y la varianza de las siguientes distribuciones:

1. $\mathcal{U}\{1, ..., n\}$ (uniforme discreta)

$X \sim \mathcal{U}\{1, \dots, n\}$

si $n = 2$

$X \sim \mathcal{U}\{1, 2\}$

$$P_X(1) = P(X=1) = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{n}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$* \; E(X) = ?$

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x \, P_X(x)$$

$$= 1 \, P_X(1) + 2 \, P_X(2) + 3 \, P_X(3) + \dots + n \, P_X(n)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n \, \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{n} \, \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

$* \; E(X^2) = ?$

$$E(X^2) = 1^2 P_X(1) + 2^2 P_X(2) + 3^2 P_X(3) + \dots + n^2 P_X(n)$$

$$= 1^2 \frac{1}{n} + 2^2 \frac{1}{n} + 3^2 \frac{1}{n} + \dots + n^2 \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \, \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

* $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

3. $\mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson)

$X \sim P(\lambda)$

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & \text{si } k = \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$$

* $E(X) = ?$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$k! \to k(k-1)!$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{0!} + \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^3}{2!} + \dots$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots\right)$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$n = k-1$

$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

$* \ E(X^2) = ?$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \, p_X(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \, \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1+1) \lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k-1)\lambda^k}{(k-1)!} + \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{\lambda}$$

$n = k-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\lambda^k}{\underbrace{(k-1)!}_{(k-1)\cdot(k-2)!}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 \lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

$n = k-2$

$$= \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \lambda^2 e^{\lambda}$$

Entonces:

$$E(X^2) = e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right)$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right)$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

* $Var(X) = ?$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

$$\boxed{Var(X) = \lambda}$$