Esperanza de una variable aleatoria

* Si X es una va discreta:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, p_X(x)$$

$R_X \to$ recorrido de X

$\Rightarrow$ E(X) no es el valor más probable ni tiene porque ser un valor del recorrido de X

ej: si tiramos un dado el valor esperado es 3,5

X = resultado de tirar el dado

$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P_X(i) = \frac{1}{6}$ si $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

* si X es una variable continua

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

Propiedades

* Linealidad: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, $a, b \in \mathbb{R}$
* si X e Y son independientes $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

Ejercicio 2

La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por:

$$p_X(x) = KC_x^3 \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} \quad \text{con } x = 1, 2, 3.$$

Hallar K y la esperanza de X.

$$P_X(x) = \begin{cases} k\, C_x^3 \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} & \text{si } x = 1,2,3 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

* $k = ?$

$$1 = P_X(1) + P_X(2) + P_X(3)$$

$$= k \underbrace{C_1^3}_{=3} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + k \underbrace{C_2^3}_{=3} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + k \underbrace{C_3^3}_{=1} \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= k \frac{1}{4^3}\left(3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1\right) = k \frac{1}{4^3} 37$$

$$\Rightarrow 1 = k\,\frac{37}{4^3} \Rightarrow \boxed{k = \frac{4^3}{37}}$$

* $E(X) = ?$ $\quad R_X = \{1,2,3\}$

$$E(X) = 1\,p_X(1) + 2\,p_X(2) + 3\,p_X(3)$$

$$= 1\,k\,\underbrace{C^3_1}_{=3}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\,k\,\underbrace{C^3_2}_{=3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 + 3\,k\,\underbrace{C^3_3}_{=1}\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= k\,\frac{1}{4^3}\left(3\cdot 3^2 + 2\cdot 3\cdot 3 + 3\right)$$

$$= \frac{\cancel{4^3}}{37}\,\frac{1}{\cancel{4^3}}\left(27 + 18 + 3\right)$$

$$= \frac{48}{37} \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{48}{37}}$$

Ejercicio 3

La función de densidad de la variable aleatoria X que mide los diámetros de paso de los hilos de la rosca de una pieza está dada por: $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$

1. ¿Cuál es el valor esperado de X? valor esperado = esperanza
2. Si ahora definimos una variable aleatoria Y tal que $Y = 3X + 1$, ¿cuál es el valor esperado de Y?

1. $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\, f_X(x)\,dx$

$$= \int_0^1 x\,\frac{4}{\pi(1+x^2)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{\pi}\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx \qquad u = 1+x^2 \quad du = 2x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\log(u)\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{\pi}\log(2)$$

2. $Y = 3X + 1 \quad E(Y) = ?$

$$E(Y) = E(3X+1) = E(3X) + E(1)$$

variable aleatoria constante que vale siempre 1

U

$R_U = \{c\}$

$$P_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = c \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$E(U) = c \cdot 1 = c$

$3X + 1 = 3X + U$

donde U variable aletoria discreta que toma el valor 1 con probabilidad 1

$$= 3E(X) + 1$$

$$= 3 \frac{2}{\pi} \log(2) + 1$$

$$= \frac{6}{\pi} \log(2) + 1$$

Ejercicio 4

Consideremos dos juegos de azar.

1. Se eligen 5 números entre 1 y 20 y se sortea mediante bolilleros 5 números entre 1 y 20 (suponemos equiprobabilidad). Si salen los 5 números elegidos por nosotros (aunque sea en otro orden), ganamos 20 veces lo apostado; si salen 4 de los 5, ganamos 4 veces lo apostado; si salen 3 de los 5, ganamos el doble de lo apostado, y en cualquier otro caso perdemos lo apostado. (Atención: cuando decimos 'ganar' nos referimos a cuánto se nos paga, y no a la ganancia neta. En realidad, la ganancia neta se obtiene luego de restar lo apostado, por ej.: si acertamos los 5 números, la ganancia neta es 19 veces lo apostado.)

2. Se eligen 5 cartas de un mazo de 32, si las 5 son del mismo color y en escalera (supongamos las cartas numeradas del 1 al 8; las escaleras son cuatro: 1 a 5, 2 a 6, 3 a 7, 4 a 8) ganamos 8 veces lo apostado, si obtenemos 5 cartas del mismo color pero no en escalera, ganamos 2 veces lo apostado; si obtenemos cartas en escalera pero no del mismo color, recuperamos lo apostado; en cualquier otro caso se pierde lo apostado. (Vale la misma precisión que en el juego anterior respecto de la ganancia y también suponemos equiprobabilidad.)

   Queremos jugar una vez por semana uno de estos juegos, con las siguientes reglas:

   Jugaremos siempre una suma fija S,

   Jugaremos siempre el mismo juego,

   Las distintas jugadas son totalmente independientes, no hay influencia de una jugada en la otra

   Jugaremos por un tiempo indefinido, muy largo.

   ¿Cuál de los juegos elegiría ud.? Al cabo de 1000 semanas, ¿cuánto estimaría usted que es la ganancia neta que se obtendría jugando siempre al primer juego? ¿Y al segundo?.

α = la suma que apostamos

X = ganancia del juego 1 (no la ganancia neta)

X_{neta} = ganancia neta del juego 1

$$X_{neta} = X - \alpha$$

Y = ganancia del juego 2 (no la ganancia neta)

Y_{neta} = ganancia neta del juego 1

$$Y_{neta} = Y - \alpha$$

querernos comparar $E(X_{neta})$ y $E(Y_{neta})$

* vamos a calcular $E(X)$

1. Se eligen 5 números entre 1 y 20 y se sortea mediante bolilleros 5 números entre 1 y 20 (suponemos equiprobabilidad). Si salen los 5 números elegidos por nosotros (aunque sea en otro orden), ganamos 20 veces lo apostado; si salen 4 de los 5, ganamos 4 veces lo apostado; si salen 3 de los 5, ganamos el doble de lo apostado, y en cualquier otro caso perdemos lo apostado. (Atención: cuando decimos 'ganar' nos referimos a cuánto se nos paga, y no a la ganancia neta. En realidad, la ganancia neta se obtiene luego de restar lo apostado, por ej.: si acertamos los 5 números, la ganancia neta es 19 veces lo apostado.)

α = la suma que apostamos

recorrido de X: $\{20\alpha, 4\alpha, 2\alpha, 0\}$

recorrido X_{neta}: $\{19\alpha, 3\alpha, \alpha, -\alpha\}$

función de probabilidad puntual de X:

$$p_X(20\alpha) = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{C^{20}_5}$$

$$p_X(4\alpha) = \frac{CF}{CP} = \frac{C^5_4 \cdot C^{15}_1}{C^{20}_5}$$

$$p_X(2\alpha) = \frac{CF}{CP} = \frac{C^5_3\, C^{15}_2}{C^{20}_5}$$

$$p_X(0) = 1 - \left(\frac{1}{C^{20}_5} + \frac{C^5_4 \cdot C^{15}_1}{C^{20}_5} + \frac{C^5_3\, C^{15}_2}{C^{20}_5} \right)$$

$$E(X) = 20\alpha\, p_X(20\alpha) + 4\alpha\, p_X(4\alpha) + 2\alpha\, p_X(2\alpha) + \overbrace{0\, p_X(0)}$$

$$= 20\alpha \frac{1}{C^{20}_5} + 4\alpha \frac{C^5_4 \cdot C^{15}_1}{C^{20}_5} + 2\alpha \frac{C^5_3\, C^{15}_2}{C^{20}_5}$$

$$= \frac{\alpha}{C^{20}_5} \left(20 + 4 C^5_4\, C^{15}_1 + 2\, C^5_3\, C^{15}_2 \right) \approx 0{,}16\alpha$$

$$E(X_{neta}) = E(X - \alpha) = E(X) - \alpha = 0{,}16\alpha - \alpha = -0{,}84\alpha$$

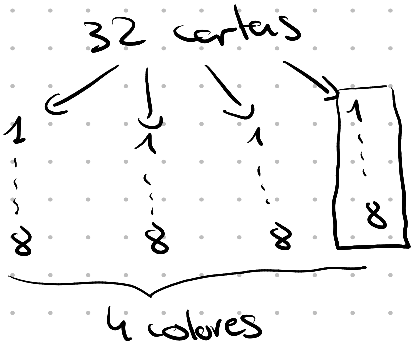
* Vamos a calcular $E(Y_{neta})$

2. Se eligen 5 cartas de un mazo de 32, si las 5 son del mismo color y en escalera (supongamos las cartas numeradas del 1 al 8; las escaleras son cuatro: 1 a 5, 2 a 6, 3 a 7, 4 a 8) ganamos 8 veces lo apostado, si obtenemos 5 cartas del mismo color pero no en escalera, ganamos 2 veces lo apostado; si obtenemos cartas en escalera pero no del mismo color, recuperamos lo apostado; en cualquier otro caso se pierde lo apostado. (Vale la misma precisión que en el juego anterior respecto de la ganancia y también suponemos equiprobabilidad.)

α = la suma que apostamos

Y = ganancia del juego 2 (no la ganancia neta)

Recorrido de Y: $\{8\alpha, 2\alpha, \alpha, 0\}$



tipos de escalera: 1-2-3-4-5
2-3-4-5-6
3-4-5-6-7
$\boxed{4-5-6-7-8}$

4 tipos de escaleras

función de probabilidad puntual de Y:

$$p_Y(8\alpha) = \frac{CF}{CP} = \frac{4\cdot 4}{C_5^{32}} = \frac{16}{C_5^{32}}$$

$$p_Y(2\alpha) = \frac{CF}{CP} = \frac{\overset{\swarrow \text{color}}{4}\cdot C_5^8 - 4\cdot 4}{C_5^{32}}$$

$$p_Y(\alpha) = \frac{CF}{CP} = \frac{\overset{\swarrow \text{tipo de escalera}}{4}\cdot 4^5 - 4\cdot 4}{C_5^{32}}$$

$p_Y(0)$ = no importa

tipos de escalera

$$\overset{\downarrow}{4}\underbrace{(4^5 - 4)}$$

formas de elegir un color para cada carta de forma que las cinco no sean del mismo color

4 colores 4 colores

4 5 6 7 8

4 colores 4 colores colores

$$E(Y) = 8\alpha\, p_Y(8\alpha) + 2\alpha\, p_Y(2\alpha) + \alpha\, p_Y(\alpha) + 0\, p_Y(0)$$

$$= 8\alpha \frac{16}{C_5^{32}} + 2\alpha \frac{4C_5^8 - 4\cdot 4}{C_5^{32}} + \alpha \frac{4\cdot 4^5 - 4\cdot 4}{C_5^{32}}$$

$$= \frac{\alpha}{C_2^3}\left(8\cdot 16 + 2(4C_5^8 - 4\cdot 4) + (4\cdot 4^5 - 4\cdot 4)\right) \approx 0{,}02\alpha$$

$E(Y_{neta}) = E(Y - \alpha) = E(Y) - \alpha = 0{,}02\alpha - \alpha = -0{,}98\alpha$

$E(X_{neta}) = -0{,}84\alpha$

conviene el juego 1 porque perdemos menos.