Primer parcial 2018

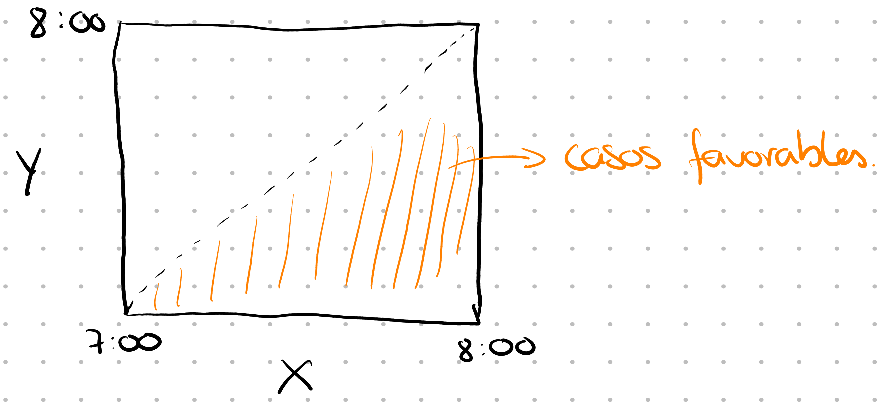
Ejercicio 1. [7 puntos]

Una persona recibe el diario en su casa a una hora al azar entre las 7 am y las 8 am. Sin embargo, la persona parte al trabajo a una hora también al azar entre la 7 am y las 8 am.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona reciba el diario antes de irse a trabajar?
2. Si además la persona demora 10 minutos en leer el diario. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona lea el diario antes de ir a trabajar, dado que lo ha recibido?

1. X = hora en la que se va a trabajar

Y = hora en la que llega el diario

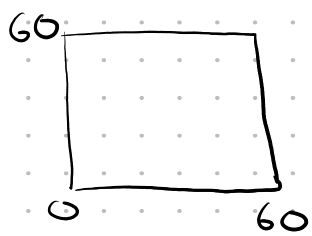


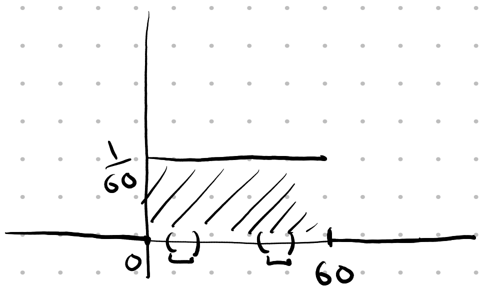
P(la persona recibe el diario antes de irse) $= P(Y \le X)$

$$= \frac{\text{Area}(\triangle)}{\text{Area}(\square)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

otra forma:





$X \sim U([0,60])$

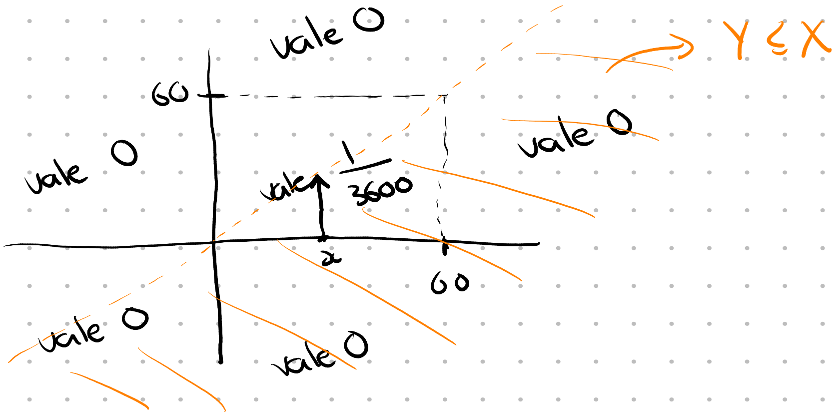
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{60} & \text{si } 0 \le x \le 60 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$Y \sim U([0,60])$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{60} & \text{si } 0 \le y \le 60 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

como X e Y son independientes $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3600} & \text{si } 0 \leq x \leq 60,\ 0 \leq y \leq 60 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



$$P(Y \leq X) = \iint_{\substack{\text{región} \\ \text{naranja}}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

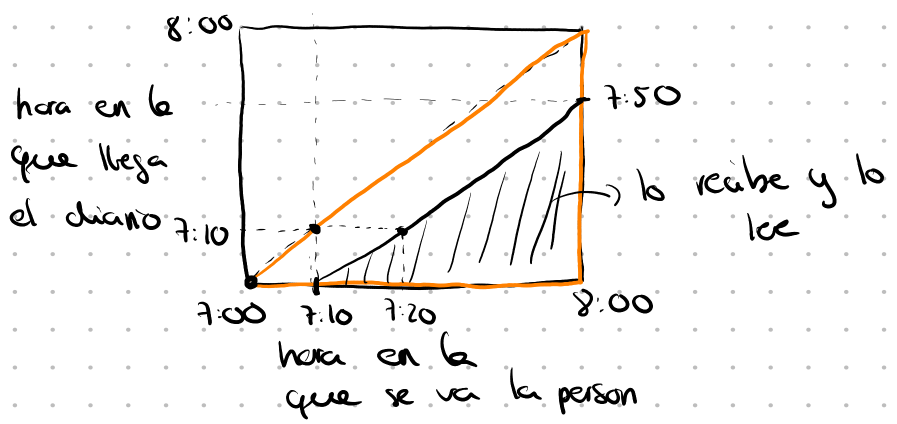
$$= \int_0^{60} \int_0^{x} \frac{1}{3600}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{60} \frac{1}{3600} x\,dx$$

$$= \frac{1}{3600} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{60}$$

$$= \frac{1}{\cancel{3600}} \frac{\cancel{3600}}{2} = \frac{1}{2}$$

b) P(lee el diario | lo recibio)



$$P(\text{lee el diario} \mid \text{lo recibio}) = \frac{P(\text{lee el diario y lo recibe})}{P(\text{recibe el diario})} = \frac{1250/3600}{1/2} = \frac{2500}{3600}$$

$$P(\text{lee el diario y lo recibe}) = \frac{\text{Area}(\triangle)}{\text{Area}(\square)} = \frac{\frac{50\times 50}{2}}{60\times 60} = \frac{1250}{3600}$$

Primer semestre 2021

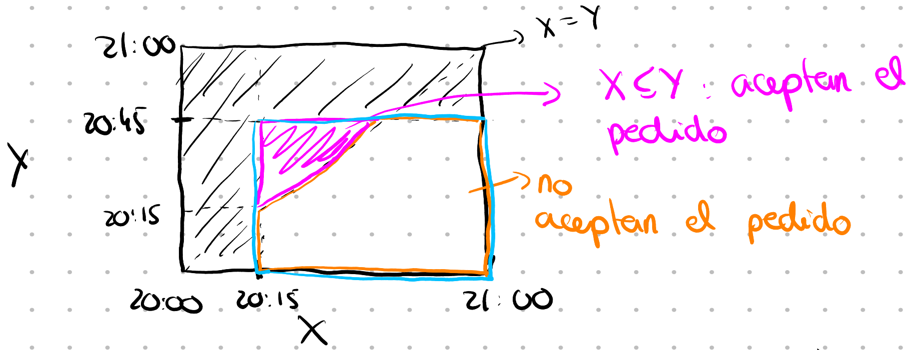
Ejercicio 5 (3 puntos)

Es fin de semana y he decidido pedir pizza, pienso llamar para realizar el pedido en algún momento después de las 20:15 y no más allá de las 21. El repartidor de la pizzería comienza el reparto entre las 20 y 20:45. La pizzería toma mi pedido solo si aún el repartidor no ha salido. ¿Cuál es la probabilidad de que rechacen mi pedido? En este ejercicio los tiempos considerados son uniformes e independientes entre sí.

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{7}{9}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

X = hora que hago el pedido

Y = hora que sale el repartidor



$$P(\text{acepten el pedido}) = P(X \le Y) = \frac{\text{Area}(\triangle)}{\text{Area}(\square)} = \frac{\frac{30\times 30}{2}}{45\times 45} = \frac{450}{2025} = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{no acepten el pedido}) = 1 - P(\text{acepten el pedido}) = 1 - \frac{450}{2025} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Primer parcial 2023

Ejercicio 3

El campanario de una iglesia suena cada hora del día en punto (durante las 24 horas). La ventana de Gladys está de frente al campanario, de forma tal que si suena cuando ella duerme, se despierta con una probabilidad de 0,3. Se asume independencia de los sucesos despertarse o no con las distintas campanadas. Gladys se acuesta a una hora al azar con distribución uniforme, entre las 23:10 y las 00:10, y quiere dormir 8 horas y media sin ser interrumpida por las campanas. Si le llamamos p a la probabilidad de que logre dormir durante 8 horas y media sin ser despertada por las campanadas, entonces se cumple

(A) $0,02 \le p < 0,03$.

(B) $0,03 \le p < 0,04$.

(C) $0,04 \le p < 0,05$.

(D) $0,05 \le p < 0,06$.

(E) $p > 0,06$.

probabilidad de que se despierte: 0,3

se acuesta con distribución uniforme entre las 23:10 y las 0:10

p = probabilidad de que duerma 8 horas y media sin ser despertada

* se acuesta a las 23:10

$23{:}10 \longrightarrow 7{:}40$

↑

8 campanadas

* se acuesta entre las 23:10 y 23:30

8 campanadas

* se acuesta entre las 23:30 y las 0:00

$23{:}50 \longrightarrow 8{:}20$

↑

9 campanadas.

* se acuesta entre las 0:00 y las 0:10

$0{:}05 \longrightarrow 8{:}35$

↑

8 campanadas

CASO 1: Se acuesta entre las 23:10 y las 23:30

→ 8 campanadas y la probabilidad de que se despierte con una campanda es 0,3

X = cantidad de veces que se despierta

$X \sim Bin(8; 0,3)$

$P(X=0) = 0,7^8 = 0,057$

$P(X=k) = C_k^8 \, p^k (1-p)^{8-k}$

CASO 2: se acuesta entre las 23:30 y las 0:00

→ 9 campanadas y la probabilidad de que se despierte con una campanada es 0,3

X = cantidad de veces que se despierta

$X \sim Bin(9; 0,3)$

$P(X=0) = 0,7^9 = 0,04$

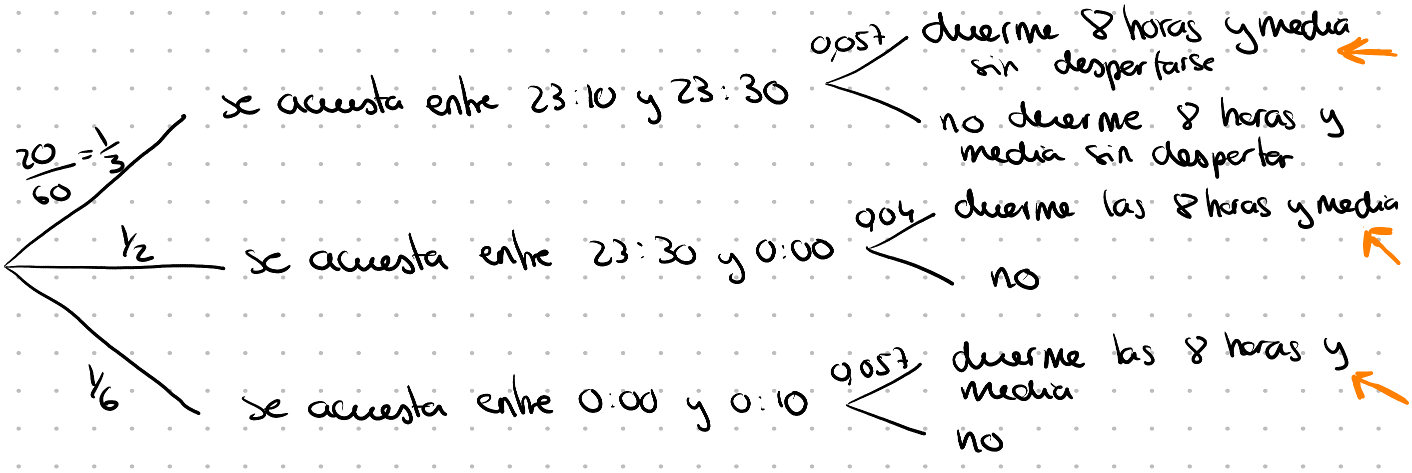
CASO 3: se acuesta entre las 0:00 y las 0:10

→ 8 campanadas

X = cantidad de veces que se despierta

$X \sim Bin(8; 0,3)$

$P(X=0) = 0{,}7^8 = 0{,}057$



$P(\text{duerme 8 horas y media sin despertar}) = \frac{1}{3}0{,}057 + \frac{1}{2}0{,}04 + \frac{1}{6}0{,}057 = 0{,}0485$

Segundo semestre 2019

Ejercicio 9 (4 puntos)

desvio $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Un fabricante de dulces produce mentas cuyo peso (en gramos) tiene distribución normal de media 20 y varianza 0.16. Suponga que 15 mentas se seleccionan independientemente y se pesan. Sea X igual al número de estas mentas que pesan menos de 19.8 gramos.

Calcular $P(X \leq 2)$.

(A) 0.022 **(B)** 0.113 **(C)** 0.287 **(D)** 0.333 **(E)** 0.403 **(F)** 0.794

Y = peso de una menta

$Y \sim \mathcal{N}(20; 0{,}4^2) \longrightarrow Z = \frac{Y-20}{0{,}4} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$X \sim Bin(15, P(Y \leq 19{,}8))$

$P(Y \leq 19{,}8) = P\left(\underbrace{\frac{Y-20}{0{,}4}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{19{,}8-20}{0{,}4}\right)$

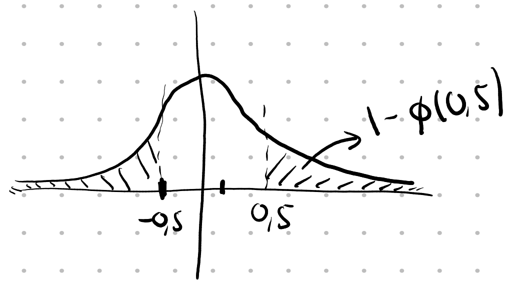
$= P\left(Z \leq \frac{19{,}8-20}{0{,}4}\right)$

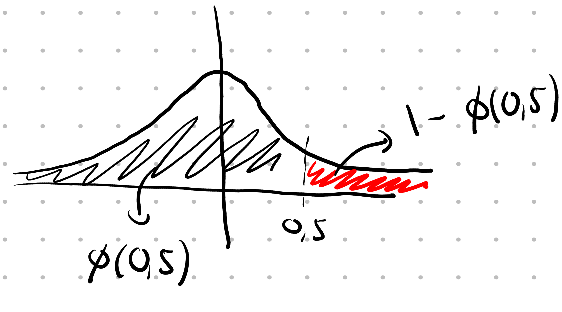
$= P(Z \leq -0{,}5)$

$= 1 - \phi(0{,}5)$

$= 1 - 0{,}6915$

$= 0{,}3085$





z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	$\boxed{0.6915}$	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

X = cantidad de mentas que pesan menos de 19,8

$X \sim Bin(15;\ 0{,}3085) \qquad p_X(k) = C_k^{15}\,(0{,}3085)^k\,(0{,}6915)^{15-k}$

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= (0{,}6915)^{15} + C_1^{15}\,(0{,}3085)(0{,}6915)^{14} + C_2^{15}\,(0{,}3085)^2\,(0{,}6915)^{13}$$

Primer parcial 2021

Ejercicio 2 (3 puntos)

Consideramos la función de densidad $f(x) = |x|$, $-1 < x < 1$ y $f(x) = 0$, $|x| \ge 1$, X e Y dos variables aleatorias independientes con esta densidad. Si $Z = min\{X,Y\}$ entonces $F_Z\left(\frac{1}{2}\right)$ vale:

(A) $\frac{55}{64}$ **(B)** $\frac{5}{8}$ **(C)** $\frac{3}{8}$ **(D)** $\frac{9}{64}$

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

* si $x < -1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \overbrace{f_X(t)}^{=0} dt = 0$$

* si $-1 < x < 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{x} -t\,dt = -\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{2}(1-x^2)$$

* si $0 < x < 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{x} t\,dt$$

$$= -\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)$$

* si $x > 1$

$F_X(x) = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1-x^2) & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1+x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad \leftarrow \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$Z = \min\{X, Y\}$

$\rightarrow X \leq x,\ Y \leq x$

$$F_Z(x) = P(\min\{X,Y\} \leq x)$$

$$= 1 - P(\overbrace{\min\{X,Y\} \geq x}) \Rightarrow \begin{cases} X \geq x \\ Y \geq x \end{cases}$$

$$= 1 - P(X \geq x, Y \geq x)$$

$$= 1 - P(X \geq x)P(Y \geq x)$$

$$= 1 - (1 - P(X \leq x))(1 - P(Y \leq x))$$

$$= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x))$$

$$= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_X(x))$$

$$= 1 - (1 - F_X(x))^2$$

$$Z = \min\{X, Y\}$$

$$F_Z(x) = 1 - (1 - F_X(x))^2$$

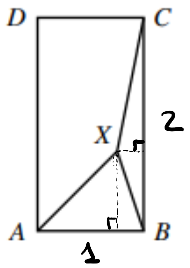
$$F_Z(\tfrac{1}{2}) = 1 - (1 - F_X(\tfrac{1}{2}))^2$$

$$= 1 - \left(1 - \tfrac{1}{2}\left(1 + (\tfrac{1}{2})^2\right)\right)^2$$

Primer semestre 2019

Ejercicio 4 (3 puntos)

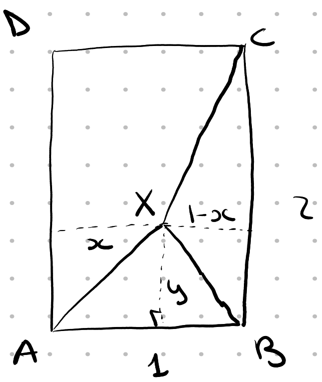
En el rectángulo $ABCD$, $AB = 1$ y $BC = 2$. El punto X se selecciona al azar dentro del rectángulo. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo ABX sea más del doble del área del triángulo BCX?



(A) $1/6$ **(B)** $3/4$ **(C)** $2/3$ **(D)** $1/3$ **(E)** $1/2$ **(F)** $1/4$

$$P(\text{area}(ABX) \geq 2\,\text{area}(BCX)) =$$

$X = (x, y)$



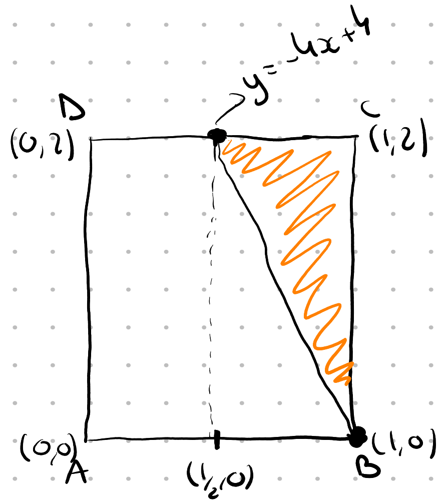
$$\text{area}(ABX) = \frac{y \cdot 1}{2} = \frac{y}{2}$$

$$\text{area}(BCX) = \frac{(1-x) \cdot 2}{2} = 1 - x$$

$$\text{area}(ABX) \geq 2\,\text{area}(BCX) \Rightarrow \frac{y}{2} \geq 2(1-x)$$

$$\Rightarrow y \geq 4(1-x)$$

$$\Rightarrow y \geq -4x + 4$$



$$y = 2 \Rightarrow -4x + 4 = 2$$

$$\Rightarrow -4x = -2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$y = -4x + 4$$

$$x = 1 \rightarrow y = 0$$

$$P(\text{area}(ABx) \geq 2\,\text{area}(BCx)) = \frac{\text{area}(\triangledown)}{\text{area}(\square)} = \frac{\frac{1/2 \cdot 2}{2}}{2 \cdot 1} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

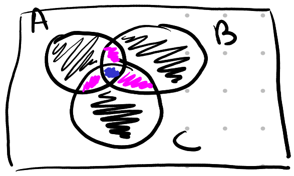
Primer semestre 2023

Ejercicio 6

Se consideran tres sucesos A, B y C en determinado espacio de probabilidad de los que se sabe que:

- B y C no pueden ocurrir a la vez. $P(B \cap C) = 0$
- A y B son independientes y también A y C son independientes. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- A, B y C son equiprobables. $P(A) = P(B) = P(C)$
- La probabilidad de que ocurra al menos uno de los tres sucesos es $0,28$. $P(A \cup B \cup C) = 0,28$

Entonces la probabilidad de que ocurran al menos dos de los tres conjuntos es igual a



(A) $0,06$.

(B) $0,02$.

(C) $0,01$.

(D) $0,04$.

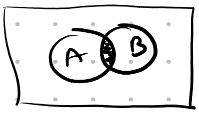
(E) $0,05$.

$$P(A \cap \overline{B \cap C}) = 0$$

unión disjunta

$$P(\text{ocurren al menos } 2) = P(\text{ocurren } A \text{ y } B \text{ o ocurren } A \text{ y } C)$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap C)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$\{\text{ocurren } A \text{ y } B\} \cap \{\text{ocurren } A \text{ y } C\} = \{\text{ocurren } A \text{ y } \overline{B \text{ y } C}\} = \emptyset$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \overline{P(A \cap B)} - P(A \cap C) - \overbrace{P(B \cap C)}^{0} + \overbrace{P(A \cap B \cap C)}^{0}$$
$$= P(A) + P(A) + P(A) - P(A)P(B) - P(A)P(C)$$
$$= P(A) + P(A) + P(A) - P(A)P(A) - P(A)P(A)$$
$$= 3P(A) - 2P(A)^2$$

$$\boxed{3P(A) - 2P(A)^2 = 0,28}$$

$$-2x^2 + 3x - 0,28 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{6,76}}{-4} = \frac{-3 \pm 2,6}{-4}$$

$$\frac{-3 + 2,6}{-4} = \frac{-0,4}{-4} = 0,1$$

$$\frac{-3 - 2,6}{-4} > 1 \ \times$$

$P(A) = 0{,}1$

$$P(\text{ocurren al menos } 2) = P(A \cap B) + P(A \cap C)$$
$$= P(A)P(B) + P(A)P(C)$$
$$= P(A)^2 + P(A)^2$$
$$= 2 \cdot 0{,}1^2$$
$$= 0{,}02$$