Ejercicio 2

Se consideran dos variables aleatorias: X, que toma los valores -1 y 1 e Y que toma los valores 2, 4 y 6 con las probabilidades conjuntas dadas por la siguiente tabla:

X/Y	2	4	6
-1	0,2	0,25	0,15
1	0,1	a	0,25

1. Hallar a
2. Calcular $P\{X < 1, Y = 4\}$
3. Hallar las funciones de probabilidad de $X + 2Y$, $X + Y$, y $|X - Y|$.

1. Hallar a

$$\sum_{\substack{x \in \{-1,1\} \\ y \in \{2,4,6\}}} P_{X,Y}(x,y) = 1$$

$$\Rightarrow 0,2 + 0,25 + 0,15 + 0,1 + a + 0,25 = 1$$

$$a + 0,95 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0,05}$$

funciones de probabilidad marginales:

X \ Y	2	4	6	P_X	F_X	
-1	0,2	0,25	0,15	0,6	0,6	$\rightarrow P(X \leq -1)$
1	0,1	0,05	0,25	0,4	1	$\rightarrow P(X \leq 1)$
P_Y	0,3	0,3	0,4			
F_Y	0,3	0,6	1			

$$P_X(-1) = P(X = -1) = \sum_{y \in \{2,4,6\}} P_{X,Y}(-1, y)$$

2. $P(X < 1, Y = 4) = P(X = -1, Y = 4) = 0,25$

$$P(X = -1, Y \geq 4) = P(X = -1, Y = 4) + P(X = -1, Y = 6)$$
$$= 0,25 + 0,15$$
$$= 0,4$$

3. $U = X + 2Y$

recorrido de U: $\{3, 7, 11, 5, 9, 13\}$

$$P_U(x) = \begin{cases} 0,2 & \text{si } x = 3 \\ 0,1 & \text{si } x = 5 \\ 0,25 & \text{si } x = 7 \\ 0,05 & \text{si } x = 9 \\ 0,15 & \text{si } x = 11 \\ 0,25 & \text{si } x = 13 \end{cases}$$

$P_U(3) = P(U=3) = P(X+2Y=3) = P(X=-1, Y=2) = 0{,}2$

$P_U(5) = P(U=5) = P(X+2Y=5) = P(X=1, Y=2) = 0{,}1$

X\Y	2	4	6
-1	$\boxed{0{,}2}$	$\boxed{0{,}25}$	0,15
1	0,1	$\boxed{0{,}05}$	$\boxed{0{,}25}$

$V = |X-Y|$

recorrido de V : $\{3, \boxed{5}, 7, 1\}$

$$P_V(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{si } x=1 \\ 0{,}25 & \text{si } x=3 \\ 0{,}5 & \text{si } x=5 \\ 0{,}15 & \text{si } x=7 \end{cases}$$

$P_V(1) = P(V=1) = P(|X-Y|=1) = P(X=1, Y=2) = 0{,}1$

$P_V(3) = P(V=3) = P(|X-Y|=3)$
$= P(X=-1, Y=2) + P(X=1, Y=4)$
$= 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}25$

$P_V(5) = P(V=5) = P(|X-Y|=5)$
$= P(X=-1, Y=4) + P(X=1, Y=6)$
$= 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

$P_{X,Y}$:

X\Y	2	4	6
-1	0,2	0,25	0,15
1	0,1	0,05	0,25

$F_{X,Y}$

$X \backslash Y$	2	4	6
-1	$\boxed{0,2}$	0,45	0,6
1	0,3	0,6	$\boxed{1}$

$\rightarrow F_{X,Y}(1,6) = P(X \leq 1, Y \leq 6) = 1$

$$F_{X,Y}(-1,2) = P(X \leq -1, Y \leq 2) = P(X=-1, Y=2)$$

$$F_{X,Y}(-1,4) = P(\underbrace{X \leq -1}_{X=-1}, \underbrace{Y \leq 4}_{Y=2,\ Y=4}) = P(X=-1, Y=2) + P(X=-1, Y=4) = 0,2 + 0,25$$

$$F_{X,Y}(-1,6) = P(\underbrace{X \leq -1}_{X=-1}, Y \leq 6)$$

$$F_{X,Y}(1,2) = P(\underbrace{X \leq 1}_{X=1,\ X=-1}, \underbrace{Y \leq 2}_{Y=2}) = P(X=1, Y=2) + P(X=-1, Y=2)$$

$$F_{X,Y}(1,4) = P(X \leq 1, Y \leq 4)$$

Ejercicio 1

$X \backslash Y$	0	1	2	3	P_X ← marginal
0	$\boxed{0}$ ← $P_{X,Y}(0,0)$	$\frac{C_1^3 C_4^4}{C_5^9}$	$\frac{C_2^3 \cdot C_3^4}{C_5^9}$	$\frac{C_3^3 \cdot C_2^4}{C_5^9}$	$P_X(0) =$
1	$\frac{C_1^2 C_4^4}{C_5^9}$	$\boxed{\frac{C_1^2 C_1^3 C_3^4}{C_5^9}}$	$\frac{C_1^2 C_2^3 C_2^4}{C_5^9}$	$\frac{C_1^2 C_3^3 C_1^4}{C_5^9}$	$P_X(1) =$
2	$\frac{C_2^2 C_3^4}{C_5^9}$	$\frac{C_2^2 C_1^3 C_3^4}{C_5^9}$	$\boxed{\frac{C_2^2 C_2^3 C_1^4}{C_5^9}}$	$\frac{C_2^2 C_3^3}{C_5^9}$	$P_X(2)$
P_Y	$P_Y(0)$ =	$P_Y(1)$ =	$P_Y(2)$	$P_Y(3)$	

$$P(X=Y) = P(X=Y=0) + P(X=Y=1) + P(X=Y=2)$$

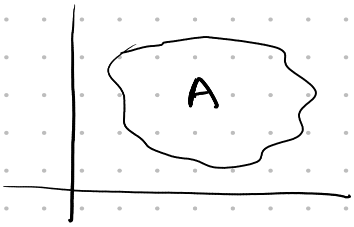
$$= P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2)$$

$$= 0 + \frac{C_1^2 C_1^3 C_3^4}{C_5^9} + \frac{C_2^2 C_2^3 C_1^4}{C_5^9}$$

Distribución conjunta de variables aleatorias continuas

X, Y variables aleatorias continuas

* $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es función de densidad conjunta si:
  - $f_{X,Y}$ integrable
  - $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
  - $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$



$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

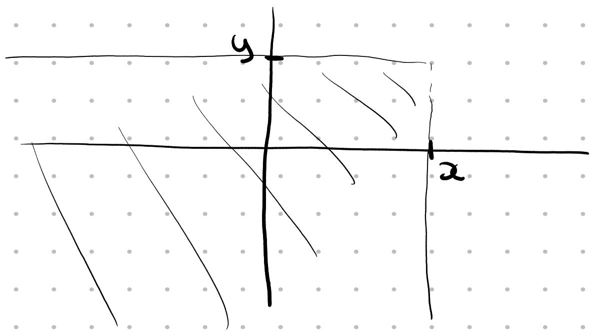
* funciones de densidad marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

* función de distribución

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$



* funciones de distribución marginales

$$F_X(x) = P(X \leq x) \;=\; \text{“} P(X \leq x, Y \leq \infty) \text{”}$$

$$= \lim_{y \to \infty} P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X\le x, Y\le y) \quad \text{) independientes}$$
$$= P(X\le x)\,P(Y\le y)$$
$$= F_X(x)\,F_Y(y)$$

Ejercicio 5

1. Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\ge 1,\ y\ge 1 \\ y & \text{si } y\in[0,1)\,,\ x\ge y \\ x & \text{si } x\in[0,1)\,,\ y\ge x \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

   Hallar la distribuciones marginales F_X y F_Y.

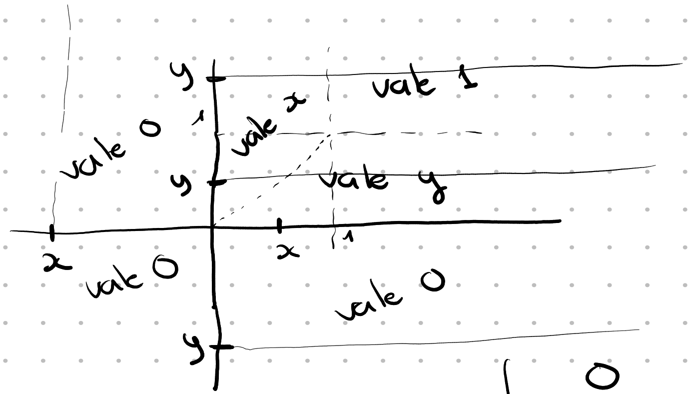
2. Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\ge 1, \quad y\ge 1 \\ y & \text{si } x\ge 1, \quad y\in[0,1) \\ x & \text{si } x\in[0,1)\,, \quad y\ge 1 \\ xy & \text{si } x\in[0,1)\,, \quad y\in[0,1) \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

   Hallar la distribución (marginal) F_X y la distribución (marginal) F_Y.

3. Si X e Y son variables aleatorias, ¿las distribuciones marginales F_X y F_Y determinan la distribución conjunta F_{XY}? ¿En qué caso F_X y F_Y determinan la distribución conjunta?

1.

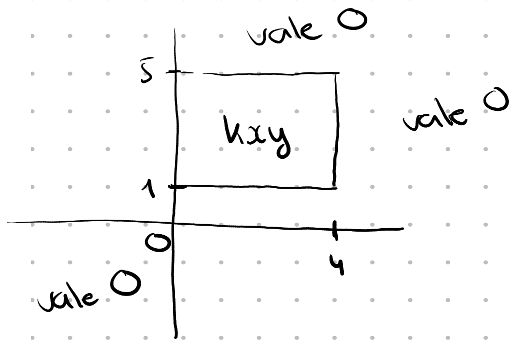


$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\in[0,1) \\ 1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \\ y & \text{si } y\in[0,1) \\ 1 & \text{si } y\ge 1 \end{cases}$$

Ejercicio 7
Se considera la siguiente función $f_{XY}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy & \text{si } x\in(0,4) \quad y\in(1,5) \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$



1. Hallar k para que f_{XY} sea la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias X, Y absolutamente continuas.
2. Hallar las densidades (marginales) f_X y f_Y.
3. Hallar la distribución conjunta F_{XY} y la distribuciones (marginales) F_X y F_Y.
4. ¿X e Y son independientes? Justifique la respuesta.
5. Calcular $\mathbf{P}\{X\ge 3, Y\le 2\}$ y $\mathbf{P}\{X+Y>4\}$.

1. buscamos k tal que $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_1^5\int_0^4 kxy\,dx\,dy$$

$$= k\int_1^5\int_0^4 xy\,dx\,dy$$

$$= k\int_1^5 y\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\,dy$$

$$= k\int_1^5 y\,\frac{16}{2}\,dy$$

$$= 8k\,\frac{y^2}{2}\Big|_1^5$$

$$= 8k\,\frac{1}{2}(25-1)$$

$$= 96k$$

$$\Rightarrow k = 1/96$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{96}xy & \text{si } x\in(0,4),\ y\in(1,5) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

2. Densidades marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{1} \overbrace{f_{X,Y}(x,y)\,dy}^{=0} + \int_1^5 f_{X,Y}(x,y)\,dy + \int_5^{+\infty} \overbrace{f_{X,Y}(x,y)\,dy}^{=0}$$

$$= \int_1^5 f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= \int_1^5 \frac{1}{96}xy\,dy \quad \text{si } x\in(0,4) \leftarrow$$

$$= \frac{1}{96}x\,\frac{y^2}{2}\Big|_1^5$$

$$= \frac{1}{96}x\,\frac{25-1}{2}$$

$$= \frac{12}{96}x = \frac{1}{8}x$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{si } x\in(0,4) \\ 0 & \text{si } x\notin(0,4) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^4 f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{96} xy\,dx \quad \text{si } y \in (1,5)$$

$$= \frac{1}{96} y \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4$$

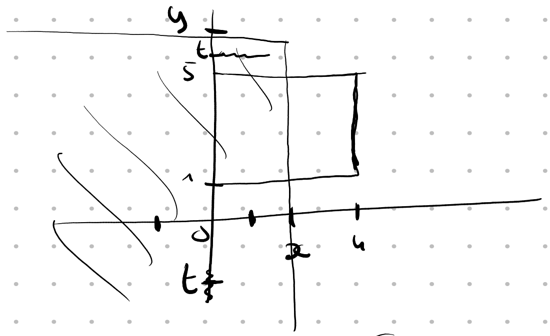
$$= \frac{1}{96} y \frac{16}{2}$$

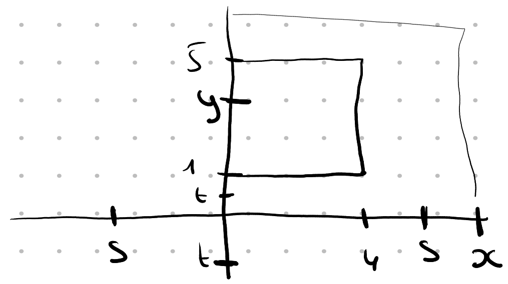
$$= \frac{1}{12} y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{12} y & \text{si } y \in (1,5) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

3. función de distribución conjunta

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$





* si $x \in (0,4)$, $y \geq 5$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$

$$= \int_1^5 \int_0^x \frac{1}{96} st\,ds\,dt$$

* si $x \geq 4$, $y \in (1,5)$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$

$$= \int_1^y \int_0^4 f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$