Ejercicio 9

Considere la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

1. Demuestre que f es una función de densidad para cualquier valor de $\lambda > 0$. Si una variable aleatoria X absolutamente continua tiene una densidad de esta forma se dice que X tiene *distribución exponencial* de parámetro λ ($X \sim \exp(\lambda)$).
2. Si $X \sim \exp(\lambda)$ hallar y graficar la función de distribución F_X.
3. Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo de vida (en años) de un cierto aparato electrónico. El fabricante desea garantizar que la duración de estos aparatos supera los x_0 años con una probabilidad de 0,90. Si se sabe que $X \sim \exp(0{,}01)$, determinar x_0. Halle también la mayor cantidad de años enteros tal que la probabilidad de que la duración de los aparatos supere ese tiempo sea mayor que 0.90.
4. Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida en años está dado por la variable aleatoria $T \sim \exp\left(\frac{1}{8}\right)$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

1. * $f(x) \geq 0$ ✓

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{=0}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \overbrace{f(x)}^{\lambda e^{-\lambda x}}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= 1 \checkmark$$

2. función de distribución de $X \sim \exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

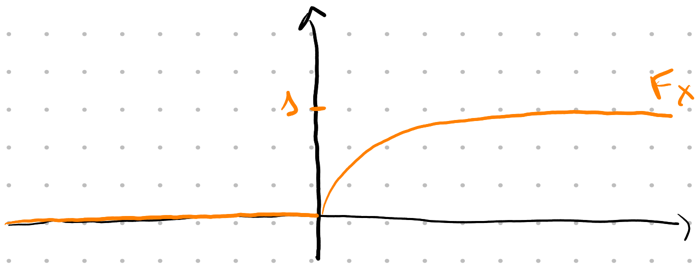
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

* si $x < 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \overbrace{f_X(x)}^{=0}\,dx = 0$

* si $x \geq 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \overbrace{f_X(t)}^{=0}\,dt + \int_{0}^{x} \overbrace{f_X(t)}^{\lambda e^{-\lambda t}}\,dt$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$

$X \sim \exp(\lambda)$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



3. Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo de vida (en años) de un cierto aparato electrónico. El fabricante desea garantizar que la duración de estos aparatos supera los x_0 años con una probabilidad de 0,90. Si se sabe que $X \sim \exp(0{,}01)$, determinar x_0. Halle también la mayor cantidad de años enteros tal que la probabilidad de que la duración de los aparatos supere ese tiempo sea mayor que 0,90.

X = tiempo de vida de un aparato electrónico

buscamos x_0 tal que $P(X > x_0) > 0{,}9$

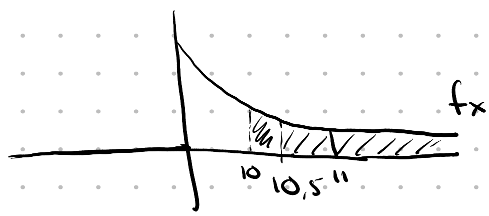
$X \sim \exp(0{,}01)$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}01x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad F_X(x) = P(X \leq x)$

$$P(X \geq x_0) = 0{,}9 \Rightarrow 1 - P(X \leq x_0) = 0{,}9$$
$$\Rightarrow P(X \leq x_0) = 0{,}1$$
$$\Rightarrow 1 - e^{-0{,}01x_0} = 0{,}1$$
$$\Rightarrow e^{-0{,}01x_0} = 0{,}9$$
$$\Rightarrow -0{,}01x_0 = \ln(0{,}9)$$
$$\Rightarrow x_0 = \frac{\ln(0{,}9)}{-0{,}01} \simeq 10{,}5$$

$P(X \geq 10{,}5) = 0{,}9$

$P(X \geq 10) > P(X \geq 10{,}5) = 0{,}9$



4. Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida en años está dado por la variable aleatoria $T \sim \exp\left(\frac{1}{8}\right)$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

T = tiempo de vida de un componente

$T \sim \exp(1/8)$

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{8}x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

P(al menos dos de los cinco funcionen después de 8 años)

X = cantidad de componentes que funcionan después de 8 años

$$X \sim Bin(5, \underbrace{P(T \geq 8)}_{\text{probabilidad de que un componente siga funcionando después de 8 años.}})$$

$$P(T \geq 8) = 1 - P(T \leq 8) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{8} \cdot 8}) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

continua

$X \sim Bin(5, e^{-1})$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1))$$

discreta

$$= 1 - C_0^5 (e^{-1})^0 (1-e^{-1})^5 - C_1^5 (e^{-1})^1 (1-e^{-1})^4$$

$$X \sim Bin(n, p) \longrightarrow p_X(k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

Distribución conjunta de variables aleatorias discreta

X, Y variables discreta

X toma valores en R_X

Y toma valores en R_Y

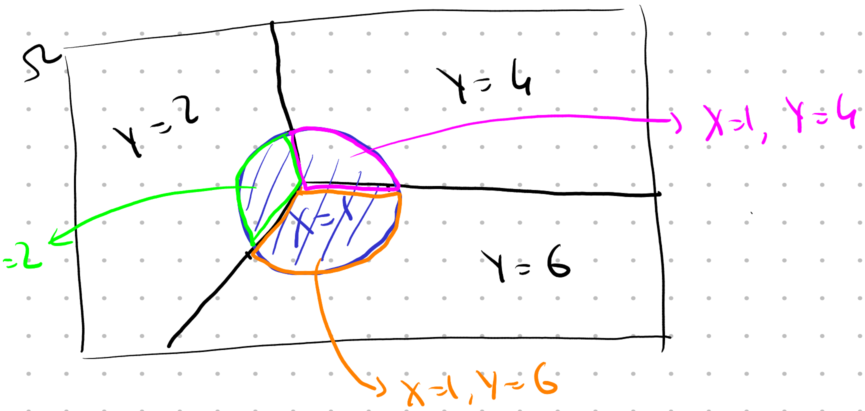
la función de probabilidad conjunta se define como

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

- $\sum\limits_{\substack{x \in R_X \\ y \in R_Y}} P_{X,Y}(x,y) = 1$

- funciones de probabilidad marginales

$$P_X(x) = P(X=x) =$$



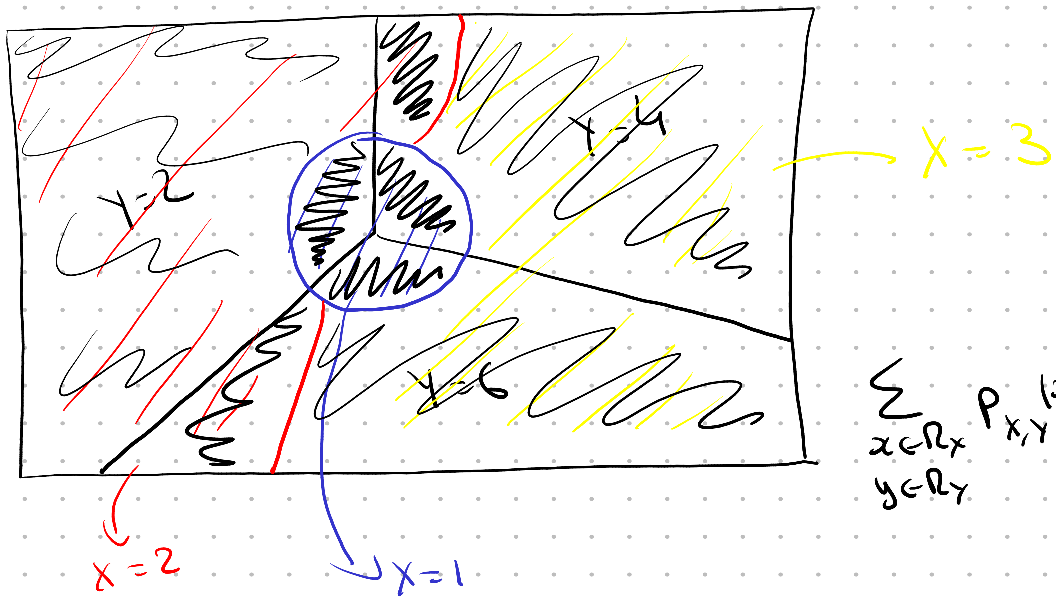
$R_X = \{1,2,3\}$

$R_Y = \{2,4,6\}$

$$P_X(1) = P(X=1)$$

$$= P\left((\{X=1\} \cap \{Y=2\}) \cup (\{X=1\} \cap \{Y=4\}) \cup (\{X=1\} \cap \{Y=6\}) \right)$$

$$= P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=4) + P(X=1, Y=6)$$



$$\sum_{\substack{x \in R_X \\ y \in R_Y}} P_{X,Y}(x,y)$$

$$\sum_{\substack{x \in R_X \\ y \in R_Y}} p_{X,Y}(x,y) = p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(1,4) + p_{X,Y}(1,6)$$
$$+ p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(2,4) + p_{X,Y}(2,6)$$
$$+ p_{X,Y}(3,2) + p_{X,Y}(3,4) + p_{X,Y}(3,6)$$

$$p_X(x) = \sum_{y \in R_Y} p_X(x,y)$$

$$p_Y(y) = \sum_{x \in R_X} p_X(x,y)$$

* X e Y independientes: $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$

$$\Rightarrow p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$$

Ejercicio 1

Se considera un grupo de 9 personas de las cuales hay 2 que son contadores y 3 que son abogados. Se eligen al azar 5 personas de ese grupo de 9. Se definen: X = Cantidad de contadores en las 5 personas elegidas e Y = Cantidad de abogados en las 5 personas elegidas

1. ¿Qué valores pueden tomar las variables aleatorias X e Y?
2. Construir la función de probabilidad (puntual) conjunta de X e Y.
3. A partir de b), halle las funciones de probabilidad (puntual) marginales de X e Y.
4. Calcular $P\{X = Y\}$
5. ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

grupo de 9 personas
→ 2 contadores
→ 3 abogados

2 contadores	3 abogados	4 otros

elegimos al azar 5 personas

X = cantidad de contadores $\quad$ Y = cantidad de abogados

1. valores que puede tomar X: $R_X = \{0,1,2\}$
   valores que puede tomar Y: $R_Y = \{0,1,2,3\}$

2. función de probabilidad conjunta de X e Y

marginal de X

$P_{X,Y}(0,0)$

$X \backslash Y$	0	1	2	3	P_X
0	0	$\frac{C^3_1 C^4_4}{C^9_5}$	$\frac{C^3_2 \cdot C^4_3}{C^9_5}$	$\frac{C^3_3 \cdot C^4_2}{C^9_5}$	$P_X(0)$ = suma en esta fila
1	$\frac{C^2_1 C^4_4}{C^9_5}$	$\frac{C^2_1 C^3_1 C^4_3}{C^9_5}$	$\frac{C^2_1 C^3_2 C^4_2}{C^9_5}$	$\frac{C^2_1 C^3_3 C^4_1}{C^9_5}$	$P_X(1)$ = suma en esta fila
2	$\frac{C^2_2 C^4_3}{C^9_5}$	$\frac{C^2_2 C^3_1 C^4_3}{C^9_5}$	$\frac{C^2_2 C^3_2 C^4_1}{C^9_5}$	$\frac{C^2_2 C^3_3}{C^9_5}$	$P_X(2)$ = suma en esta fila
P_Y	$P_Y(0)$	$P_Y(1)$	$P_Y(2)$	$P_Y(3)$	

marginal de Y

$P_Y(0)$ = suma en esta columna

$P_Y(1)$ = suma en esta columna

3. funciones de probabilidad marginales

X toma valores en $\{0,1,2\}$

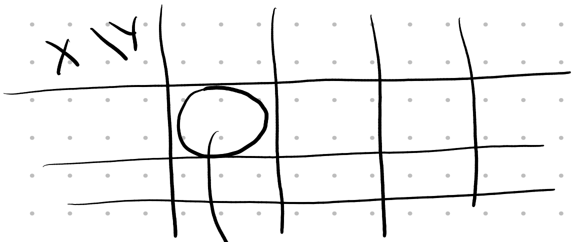
$$P_X(0) = P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=0, Y=3)$$

5. X e Y independientes?

X e Y independientes $\iff$ $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\, P(Y=y)$

para todos $x \in R_X$, $y \in R_Y$

$$P(X=0, Y=0) = 0 \text{ pero } P(X=0) \neq 0 \text{ y } P(Y=0) \neq 0$$



para que X, Y independientes esta entrada tiene que ser (suma de la fila) x (suma de la columna)