Distribución geométrica (Ejercicio 9)

→ tenemos un experimento con probabilidad de exito p
→ repetimos el experimento hasta obtener el primer exito

X cuenta el número de veces que repetimos el experimento

X toma valores en $\{1, 2, \ldots\}$ $\qquad X \sim Geo(p)$

sea $k \in \{1, 2, \ldots\}$

$p_X(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$

$$\underline{F} \; \underline{F} \; \underline{F} \; \underline{F} \; \underline{F} \; \ldots \; \underbrace{\underline{F}}_{} \!\!\overset{1-p}{} \; \underline{E}\overset{p}{}$$

repetición número k

vamos a verificar que p_X es efectivamente una fpp

* $p_X(k) \geq 0$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$ ✓
* $\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = 1$

$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	$(1-p)$	$(1-p)(1-p)$	$(1-p)(1-p)(1-p)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \\
&= p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \\
&= p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i} \\
&= p \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= p \frac{1}{p} \\
&= 1 \checkmark
\end{aligned}$$

$X \sim Geo(p)$

3. *Pérdida de memoria:* Probar que $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\mathbf{P}(X > m+n | X > m) = \mathbf{P}(X > n).$$

Es decir, si en el paso m no tuvimos éxito, es como que empezáramos nuevamente.

$$\overbrace{\underbrace{F\ \ F\ \ \cdots\cdots\ \ F}_{m \text{ intentos}}\ \ F\ \ \cdots\ \ F\ \ F\ \ F}^{m+n \text{ intentos}}\ \ \_\_ \qquad P(X>m+n \mid X>m)$$

$$\underbrace{F\ \ F\ \ F\ \ \cdots\ \ F}_{n \text{ intentos}}\ \ \_\_ \qquad P(X>n)$$

$$P(X>m+n \mid X>m) = P(X>n)$$

$$P(X>m+n \mid X>m) = \frac{P(\{X>m+n\} \cap \{X>m\})}{P(X>m)} = \frac{P(X>m+n)}{P(X>m)}$$

vamos a calcular $P(X>t)$ con $t \in \{1, 2, \ldots\}$

$$P(X>t) = 1 - P(X \leq t)$$

$$P(X \leq t) = \overbrace{P(X=1)}^{p_X(1)} + \overbrace{P(X=2)}^{p_X(2)} + P(X=3) + \ldots + P(X=t)$$

$$= \sum_{k=1}^{t} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{t} p_X(k)$$

$$
\begin{aligned}
P(X > t) &= 1 - P(X \leq t) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{t} p_X(k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{t} (1-p)^{k-1} p \\
&= 1 - p \sum_{k=1}^{t} (1-p)^{k-1} \qquad i = k-1 \\
&= 1 - p \sum_{i=0}^{t-1} (1-p)^{i} \\
&= 1 - p \, \frac{1-(1-p)^t}{1-(1-p)} \\
&= 1 - \cancel{p} \, \frac{1-(1-p)^t}{\cancel{p}} \\
&= 1 - (1-(1-p)^t) = 1 - 1 + (1-p)^t \\
&= (1-p)^t
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r}}$$

$$\boxed{P(X > t) = (1-p)^t}$$

$$\underbrace{P(X > m+n \mid X > m)}_{\overset{\text{queremos}}{=} P(X > n)} = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = P(X > n)$$

4. El tablero de un conmutador telefónico es de muy poca capacidad en cuanto al tiempo de ocupado se refiere, de tal forma que las personas no pueden encontrar una línea desocupada para sus llamadas.

Puede ser de interés saber el número de intentos necesarios que se requieren para tener una línea disponible. Suponga que $p = 0{,}05$ es la probabilidad de tener línea durante la mayor congestión de llamadas. Se tiene el interés particular de saber la probabilidad de que sean necesarios 5 intentos para lograr una comunicación.

X = cuenta la cantidad de intentos

$X \sim Geo(0{,}05) \rightsquigarrow p_X(k) = 0{,}95^{k-1}\, 0{,}05$

$P(X=5) = p_X(5) = 0{,}95^4 \cdot 0{,}05$

Distribución Poisson (ejercicio 8)

esperamos el bus entre 15 y 16

X = cantidad de veces que pasa el bus

λ = cantidad de veces que pasa el bus en promedio entre las 15 y las 16

$X \sim Poisson(\lambda)$ X toma valores en $\{0, 1, \dots\}$

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

vamos a verificar que es una fpp:

* $p_X(k) \geq 0$ ✓
* $\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

2. El número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador durante un milisegundo en un experimento de laboratorio es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo determinado?

$\underbrace{\longmapsto}_{\text{1 milisegundo}}$ → en promedio pasan 4 particulas radioactivas

X = cantidad de particulas radioactivas que pasan

$X \sim \text{Poisson}(4)$

$$P_X(k) = e^{-4} \frac{4^k}{k!}$$

$$P(X=6) = P_X(6) = e^{-4} \frac{4^6}{6!}$$

4. Se certifica la calidad de discos de computadora pasándolos por un certificador que cuenta el número de sectores defectuosos. Una determinada marca de discos tiene un promedio de $0,1$ sectores defectuosos por disco. Calcular la probabilidad de que:

a) un disco que se inspeccione no tenga sectores defectuosos.
b) un disco que se inspeccione tenga más de un sector defectuoso.
c) dos discos que se inspeccionen no tengan sectores defectuosos.

X = cantidad de sectores defectuosos

$\underbrace{\longmapsto}_{\text{disco}}$

$X \sim \text{Poisson}(0,1)$

$$P_X(k) = e^{-0,1} \frac{(0,1)^k}{k!}$$

a) $P(X=0) = e^{-0,1} \frac{(0,1)^0}{0!} = e^{-0,1}$

b) $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1)$

$= 1 - P(X=1) - P(X=0)$

$= 1 - P_X(1) - P_X(0)$

$= 1 - e^{-0,1} (0,1)^1 \ldots e^{-0,1}$

$$= 1 - p_X(1) - p_X(0)$$

$$= 1 - e^{-0,1}\frac{(0,1)^1}{1!} - e^{-0,1}$$

$$= 1 - e^{-0,1}\cdot 0,1 - e^{-0,1}$$

$$= 1 - 1,1e^{-0,1}$$

los dos discos son independientes

c) $P(\text{los 2 discos no tienen sectores defectuosos}) = P(X=0)\,P(X=0) = (e^{-0,1})^2$

d) inspecionamos 3 discos y queremos la probabilidad de que por lo menos uno no tenga sectores defectuosos

Y = cuenta la cantidad de discos sin sectores defectuosos

$$Y \sim Bin(3, e^{-0,1})$$

Ejercicio 6

1. Tres jugadores tiran al blanco. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 3 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?

   b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

A = solo uno da en el blanco

$$P(1\text{ acierta} \mid A) = \frac{P(A \mid 1\text{ acierta})\,P(1\text{ acierta})}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}}{P(A)}$$