

Distribución geométrica (Ejercicio 9)

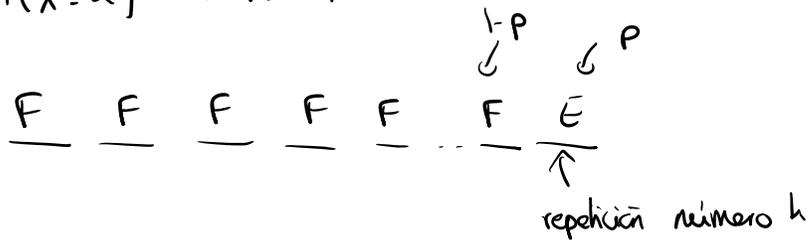
- tenemos un experimento con probabilidad de éxito p
- repetimos el experimento hasta obtener el primer éxito

X cuenta el número de veces que repetimos el experimento

X toma valores en $\{1, 2, \dots\}$ $X \sim \text{Geo}(p)$

Sea $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$P_X(k) = P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$$



Vamos a verificar que P_X es efectivamente una fpp

$$\ast P_X(k) \geq 0 \text{ para todo } k \in \{1, 2, \dots\} \leftarrow$$

$$\ast \sum_{k=1}^{\infty} P_X(k) = 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P_X(k) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \\ &= p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\ &= p \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= p \frac{1}{p} \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	$(1-p)$	$(1-p)(1-p)$	$(1-p)(1-p)(1-p)$

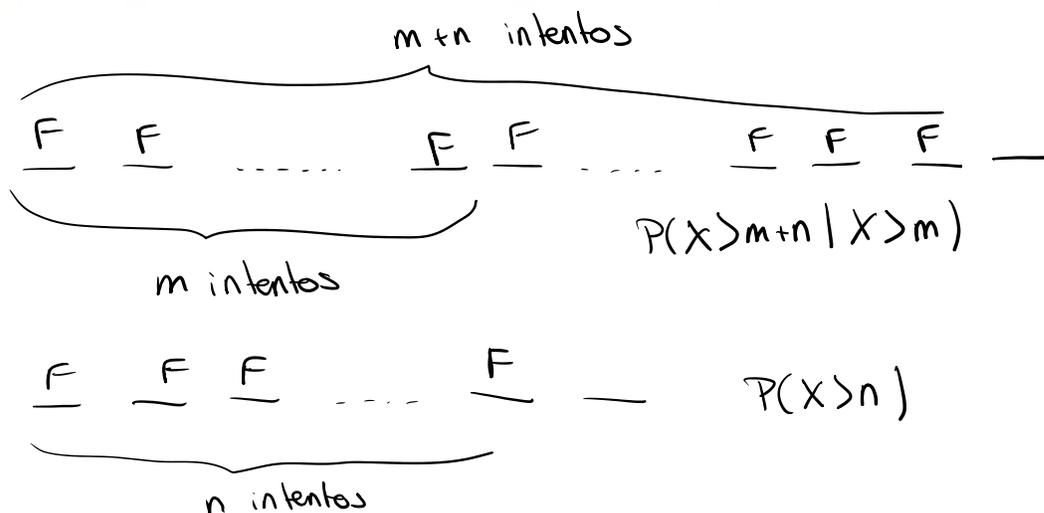
$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$$

$$X \sim \text{Geo}(p)$$

3. Pérdida de memoria: Probar que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$P(X > m+n | X > m) = P(X > n).$$

Es decir, si en el paso m no tuvimos éxito, es como que empezáramos nuevamente.



$$P(X > m+n | X > m) = P(X > n)$$

$$P(X > m+n | X > m) = \frac{P(\{X > m+n\} \cap \{X > m\})}{P(X > m)} = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)}$$

vamos a calcular $P(X > t)$ con $t \in \{1, 2, \dots\}$

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq t) &= \overbrace{P(X=1)}^{P_X(1)} + \overbrace{P(X=2)}^{P_X(2)} + P(X=3) + \dots + P(X=t) \\ &= \sum_{k=1}^t P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^t P_X(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X > t) &= 1 - P(X \leq t) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^t P_X(k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^t (1-p)^{k-1} p \\
&= 1 - p \sum_{k=1}^t (1-p)^{k-1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} i = k-1 \\
&= 1 - p \sum_{i=0}^{t-1} (1-p)^i \\
&= 1 - p \frac{1 - (1-p)^t}{1 - (1-p)} \\
&= 1 - \cancel{p} \frac{1 - (1-p)^t}{\cancel{p}} \\
&= 1 - (1 - (1-p)^t) = 1 - 1 + (1-p)^t \\
&= (1-p)^t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r}}$$

$$\boxed{P(X > t) = (1-p)^t}$$

$$\underbrace{P(X > m+n | X > m)}_{\substack{\text{" queremos} \\ P(X > n)}} = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = P(X > n)$$

4. El tablero de un conmutador telefónico es de muy poca capacidad en cuanto al tiempo de ocupado se refiere, de tal forma que las personas no pueden encontrar una línea desocupada para sus llamadas.

Puede ser de interés saber el número de intentos necesarios que se requieren para tener una línea disponible. Suponga que $p = 0,05$ es la probabilidad de tener línea durante la mayor congestión de llamadas. Se tiene el interés particular de saber la probabilidad de que sean necesarios 5 intentos para lograr una comunicación.

$X =$ cuenta la cantidad de intentos

$$X \sim \text{Geo}(0,05) \rightsquigarrow P_X(k) = 0,95^{k-1} \cdot 0,05$$

$$P(X=5) = P_X(5) = 0,95^4 \cdot 0,05$$

Distribución Poisson (ejercicio 8)

esperamos el bus entre 15 y 16



$X =$ cantidad de veces que pasa el bus

$\lambda =$ cantidad de veces que pasa el bus en promedio entre bus 15 y bus 16

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ X toma valores en $\{0, 1, \dots\}$

$$P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

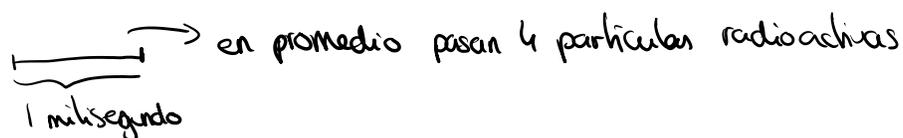
vamos a verificar que es una fpp:

$$* P_X(k) \geq 0 \quad \checkmark$$

$$* \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

2. El número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador durante un milisegundo en un experimento de laboratorio es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo determinado?

 en promedio pasan 4 partículas radiactivas
1 milisegundo

$X =$ cantidad de partículas radiactivas que pasan

$$X \sim \text{Poisson}(4)$$

$$P_X(k) = e^{-4} \frac{4^k}{k!}$$

$$P(X=6) = P_X(6) = e^{-4} \frac{4^6}{6!}$$

4. Se certifica la calidad de discos de computadora pasándolos por un certificador que cuenta el número de sectores defectuosos. Una determinada marca de discos tiene un promedio de 0,1 sectores defectuosos por disco. Calcular la probabilidad de que:

- un disco que se inspeccione no tenga sectores defectuosos.
- un disco que se inspeccione tenga más de un sector defectuoso.
- dos discos que se inspeccionen no tengan sectores defectuosos.

$X =$ cantidad de sectores defectuosos

$$X \sim \text{Poisson}(0,1)$$

$$P_X(k) = e^{-0,1} \frac{(0,1)^k}{k!}$$

 disco

$$a) P(X=0) = e^{-0,1} \frac{(0,1)^0}{0!} = e^{-0,1}$$

$$\begin{aligned} b) P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X=1) - P(X=0) \\ &= 1 - P_X(1) - P_X(0) \\ &= 1 - e^{-0,1} (0,1)^1 - e^{-0,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - P_X(1) - r_X^{1-1} \\
 &= 1 - e^{-0,1} \frac{(0,1)^1}{1!} - e^{-0,1} \\
 &= 1 - e^{-0,1} \cdot 0,1 - e^{-0,1} \\
 &= 1 - 1,1e^{-0,1}
 \end{aligned}$$

los dos discos
son independientes

c) $P(\text{bs 2 discos no hacen sectores defectuosos}) = P(X=0) P(X=0) = (e^{-0,1})^2$

d) inspeccionamos 3 discos y queremos la probabilidad de que por lo menos uno no tenga sectores defectuosos

$Y =$ cuenta la cantidad de discos sin sectores defectuosos

$$Y \sim \text{Bin}(3, e^{-0,1})$$

Ejercicio 6

1. Tres jugadores tiran al blanco. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 3 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?
- Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

$A =$ solo uno da en el blanco

$$\begin{aligned}
 P(1 \text{ acierta} | A) &= \frac{P(A | 1 \text{ acierta}) P(1 \text{ acierta})}{P(A)} \\
 &= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}}{P(A)}
 \end{aligned}$$

