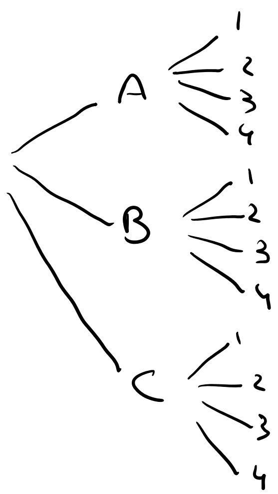
Problemas de conteo

① Regla del producto

Si una tarea se realiza en dos etapas:

* la primera se puede realizar de m formas distintas
* la segunda se puede realizar de n formas distintas

Entonces la cantidad de formas que se puede realizar la tarea es $m \times n$.



$3 \cdot 4$

② Regla de la suma

Tenemos dos tareas

* una tarea se puede realizar de m formas distintas
* la otra tarea se puede realizar de n formas distintas
* ambas tareas son disjuntas

Entonces hay $n+m$ formas de realizar alguna de las dos tareas

3. En una fábrica los productos se codifican con 3 letras distintas que indican 3 operaciones que sufren cada uno de los productos y 3 cifras distintas y en ese orden: primero las letras y después los números. Las letras utilizadas son A, B, C y D.

(a) ¿Cuántos productos pueden codificarse?

(b) ¿Cuántos códigos empiezan con A y terminan con 9?

(c) ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos y en ese orden?

(d) ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos?

(e) ¿En cuántos productos aparecen dos números pares juntos y el otro es impar?

a)

letras | cifras

4 pos. | 3 pos. | 2 pos. | 10 pos. | 9 pos. | 8 pos.

Por la regla del producto:

la cantidad de códigos distintos es: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

b)

letras | cifras

A | 3 pos. | 2 pos | 9 pos. | 8 pos. | 9

Por la regla del producto:

la cantidad de códigos distintos es: $3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8$

c) caso 1:

$$\overbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ 4 \text{ pos.}}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow \\ 3 \text{ pos.}}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ pos.}}}{\_\_\_}}^{\text{letras}}\ \overbrace{\underline{\ 0\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underset{\substack{\uparrow \\ 8 \text{ pos.}}}{\_\_\_}}^{\text{cifras}}$$

por la regla del producto, total del caso 1: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$

caso 2:

$$\overbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ 4 \text{ pos.}}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow \\ 3 \text{ pos.}}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ pos.}}}{\_\_\_}}^{\text{letras}}\ \overbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ 8 \text{ pos.}}}{\_\_\_}\ \underline{\ 0\ }\ \underline{\ 2\ }}^{\text{cifras}}$$

por la regla del producto, total del caso 1: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$

Como los dos casos son disjuntos, por la regla de la suma, la cantidad de códigos es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$

3) Arreglos de n en k

¿De cuántas formas podemos construir una lista ordenada de k elementos distintos a partir de un conjunto de n elementos?

$$\underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ n \text{ posibilidades}}}^{1^{er}\text{ elemento}} \ \underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ n-1 \text{ pos.} \\ n-2+1}}^{2^{do}\text{ elem.}} \ \underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ n-2 \text{ pos.} \\ n-3+1}}^{3^{er}\text{ elem}} \ \cdots\cdots \ \underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ n-k+1 \text{ pos.}}}^{k\text{-ésimo elem}}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1$$

por la regla del producto

$$\begin{aligned}\#\text{ listas ordenadas} &= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} = \text{arreglos de } n \text{ en } k \quad A_k^n\end{aligned}$$

4) Combinaciones de n en k

¿De cuántas formas construir un $\overbrace{\text{subconjunto}}^{\text{lista no ordenada}}$ de k elementos a partir de un conjunto de n elementos?

ej: subconjuntos de 3 elementos de $\{A, B, C, D\}$

$$\underline{D}\ \ \underline{B}\ \ \underline{A}$$
$$\underline{B}\ \ \underline{D}\ \ \underline{A}$$

$$\{A, B, C\} \longrightarrow \begin{matrix}(A, B, C), & (B, C, A), & (C, A, B) \\ (A, C, B), & (B, A, C), & (C, B, A)\end{matrix}$$

subconjunto

listas ordenadas

$$3\cdot 2\cdot 1 = 3!$$

A partir de un subconjunto de tres elementos, podemos construir 3! listas ordenadas.

$$\# \text{listas ordenadas de 3 elementos} = \# \text{subconjuntos de 3 elementos} \cdot 3!$$

$$\Rightarrow \# \text{subconjuntos de 3 elementos} = \frac{\# \text{listas ordenadas de 3 elem}}{3!}$$

$$\underbrace{\# \text{subconjuntos de } k \text{ elementos}}_{C_k^n} = \frac{\overbrace{\# \text{listas ordenadas de } k \text{ elementos}}^{A_k^n}}{k!}$$

$$\boxed{C_k^n = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

total = 12

2. De un grupo formado por 3 ingenieros, 5 economistas y 4 arquitectos deben seleccionarse 4 para formar una comisión.

   (a) Calcular cuántas comisiones diferentes podrían formarse.

   (b) Calcular cuántas de esas comisiones estarían integradas por un ingeniero, dos economistas y un arquitecto.

   (c) Calcular en cuántas configuraciones hay por lo menos dos arquitectos.

a) # comisiones diferentes = # formas de elegir 4 personas entre las 12 del grupo sin importar el orden

$$= C_4^{12}$$

b)

$$\# \text{comisiones} = \overbrace{3}^{C_1^3} \cdot C_2^5 \cdot \overbrace{4}^{C_1^4}$$

3: formas de elegir el ingeniero

C_2^5: formas de elegir los dos economistas

4: formas de elegir el arquitecto

c)

Caso 1: comisiones con exactamente 2 arquitectos

$\underbrace{\text{2 arquitectos}}_{\substack{\uparrow \\ \text{elegir 2 entre los 4 arq.}}} \; \underbrace{\text{2 personas mas}}_{\substack{\uparrow \\ \text{elegir 2 entre los 8 que no son arquitectos}}}$ $\quad C^4_2 \cdot C^8_2$

Caso 2: comisiones con exactamente 3 arquitectos

$\underbrace{\text{3 arquitectos}}_{\substack{\uparrow \\ \text{elegir 3 entre los 4 arquitectos}}} \; \underbrace{\text{una persona mas}}_{\substack{\uparrow \\ \text{elegir una entre los 8 que no son arquitectos}}}$ $\quad C^4_3 \cdot C^8_1$

Caso 3: comisiones con exactamente 4 arquitectos

$\underbrace{\text{4 arquitectos}}_{\substack{\uparrow \\ \text{elegir 4 entre los 4 arquitectos}}}$ $\quad C^4_4 \cdot C^8_0 = C^4_4 = 1$

Como los casos son disjuntos, por la regla de la suma

$$\#\text{ comisiones} = C^4_2 \cdot C^8_2 + C^4_3 \cdot C^8_1 + 1$$

5. Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 36 posibilidades.

(a) ¿Cuántas jugadas posibles hay?

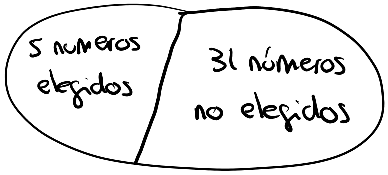
(b) Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan exactamente uno de los números elegidos?

(c) Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan por lo menos 2 de los números elegidos?

a) # jugadas = # formas de elegir 5 números distintos entre 36 sin importar el orden

$= C^{36}_5$

b)



$$\# \text{jugadas que contengan exactamente uno de los 5 elegidos} = C^5_1 \cdot C^{31}_4$$

formas de tomar un número entre los cinco elegidos

formas de tomar cuatro números entre los 31 no elegidos

c)