5 ESPACIOS VECTORIALES

Supongamos que tenemos $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y que se nos pide demostrar que $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$, donde $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$. Usando la definición de producto por escalares en $\mathbb{R}^n$, podemos utilizar el siguiente argumento:

$$0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (0 \cdot x_1, \ldots, 0 \cdot x_n) = (0, \ldots, 0),$$

donde la última igualdad se debe a que el número real cero multiplicado por cualquier otro número real da cero. De esta manera, queda demostrado que $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Ahora, pensemos en otra demostración para $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Sabemos de la aritmética en $\mathbb{R}$ que $0 = 0 + 0$. Luego, podemos multiplicar la igualdad anterior por $\vec{x}$ y obtener la siguiente cadena de argumentos:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 \\
0 \cdot \vec{x} &= (0 + 0) \cdot \vec{x} \\
0 \cdot \vec{x} &= 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} && \text{(propiedad distributiva en } \mathbb{R}^n\text{)} \\
0 \cdot \vec{x} + [-(0 \cdot \vec{x})] &= (0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}) + [-(0 \cdot \vec{x})] && \text{(propiedad del elemento opuesto en } \mathbb{R}^n\text{)} \\
\vec{0} &= 0 \cdot \vec{x} + [0 \cdot \vec{x} + [-(0 \cdot \vec{x})]] && \text{(propiedad del elemento opuesto y asociativa)} \\
\vec{0} &= 0 \cdot \vec{x} + \vec{0} && \text{(propiedad del elemento opuesto)} \\
\vec{0} &= 0 \cdot \vec{x}. && \text{(propiedad del elemento neutro)}
\end{aligned}$$

Note que en la demostración anterior no usamos la estructura de $\vec{x}$ ni la definición de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$. Únicamente importaron las propiedades asociativas, distributivas, del elemento neutro y del opuesto. Entonces, se pueden replicar los argumentos anteriores en cualquier conjunto V equipado con operaciones de suma y de producto por escalares en donde sabemos que se cumplen las propiedades mencionadas, como por ejemplo en $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Lo anterior ocurre también en las demostraciones de otro tipo de propiedades. Es decir, que para ciertos resultados conocidos en conjuntos como $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ no hace falta usar las descripciones intrínsecas de sus elementos y operaciones, sino una serie de propiedades en común. Entonces, para no estar repitiendo las mismas demostraciones en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (y en otro tipo de conjuntos que estudiaremos más adelante), surge la necesidad de tener un lenguaje unificador para escribir estas demostraciones. Dicha necesidad queda cubierta gracias a la teoría de espacios vectoriales, que desarrollaremos en este capítulo.

5.1. Definición y ejemplos de espacios vectoriales

Definición 5.1

Sea V un conjunto no vacío (a cuyos elementos llamaremos **vectores**) y $\mathbb{K}$ un cuerpo (usualmente $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, y a cuyos elementos llamaremos **escalares**). Consideremos además un par de operaciones

$$
\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha \cdot v \end{aligned}
$$

a las cuales nos referiremos como **suma** y **producto por escalares**. Diremos que la cuaterna $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$** (o un **$\mathbb{K}$-espacio vectorial**) si se satisfacen las siguiente propiedades:

- **propiedad conmutativa de la suma:** Para todo $v_1, v_2 \in V$, se cumple que
$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1.$$
- **propiedad asociativa de la suma:** Para todo $v_1, v_2, v_3 \in V$, se cumple que
$$v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3.$$
- **existencia del elemento neutro:** Existe $0_V \in V$ tal que
$$0_V + v = v$$
para todo $v \in V$.
- **existencia de opuestos:** Para cada $v \in V$, existe $w \in V$ tal que
$$v + w = 0_V.$$
- **elemento neutro del producto por escalares:** Para todo $v \in V$, se cumple que
$$1 \cdot v = v.$$
- **propiedad asociativa del producto por escalares:** Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$, se cumple que
$$(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v).$$
- **propiedad distributiva del producto por escalares respecto a la suma de vectores:** Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v_1, v_2 \in V$, se cumple que
$$\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2.$$
- **propiedad distributiva del producto por escalares respecto a la suma de escalares:** Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ se cumple que
$$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v.$$

No debe confundirse la palabra “suma” en la definición anterior con lo que habitualmente entendemos por sumar. En el contexto de espacios vectoriales, una suma es simplemente una operación binaria en el conjunto V, es decir, una función $V \times V \longrightarrow V$ que a cada par de elementos $v_1, v_2 \in V$ le asigna un elemento de V, denotado como $v_1 + v_2$. La razón por la cual se usa la notación “$+$” es porque la suma habitual de números que ya conocemos representa un ejemplo particular para ciertas elecciones de V. Comentarios similares valen también para la operación de producto por escalares.

Ejemplo 28.

1. En conjunto de n-uplas $\mathbb{R}^n$ con las operaciones habituales de suma y multiplicación por escalares

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) &\mapsto (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha,(x_1,\dots,x_n)) &\mapsto (\alpha\, x_1,\dots,\alpha\, x_n), \end{aligned}$$

   es un espacio vectorial real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

   Lo anterior es válido para todo número natural $n \geqslant 1$. En particular, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ es un espacio vectorial sobre sí mismo (con la suma y multiplicación usual de números reales).

   En una estructura de espacio vectorial, cada uno de los elementos que conforma la cuaterna $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es de suma importancia. Es decir, alterar uno de ellos puede romper la estructura. Por ejemplo, cuando pensamos en $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial real, lo hacemos considerando las operaciones usuales de suma y producto por escalares; pero si cambiamos una de estas operaciones por otra, en general $\mathbb{R}^2$ no tiene por qué seguir siendo un espacio vectorial:

   - Si consideramos $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \dot{+}, \cdot)$, donde $\cdot$ es el producto por escalares usual, y $\dot{+}$ se define como

$$(x_1, x_2) \dot{+} (y_1, y_2) := (x_1, x_2)$$

     para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \dot{+}, \cdot)$ **no** es un espacio vectorial (la operación $\dot{+}$ no es conmutativa).

2. El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Recuerde que $z \in \mathbb{C}$ si

$$z = a + i\, b,$$

   donde $a, b \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria (es decir, $i \cdot i = -1$). Para la estructura de espacio vectorial, se consideran las operaciones

$$(a + i\, b) + (c + i\, d) := (a + c) + i\,(b + d) \qquad \text{y} \qquad \alpha \cdot (a + i\, b) := (\alpha a) + i\,(\alpha b),$$

   donde $a + i\, b, c + i\, d \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Es decir, $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

   Cambiar el cuerpo $\mathbb{K}$ puede dar lugar a un cambio de la estructura de espacio vectorial. Dentro de este mismo ejemplo, consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y la operación $\cdot_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(\alpha + i\, \beta) \cdot_{\mathbb{C}} (a + i\, b) := (\alpha a - \beta b) + i(\alpha b + \beta a).$$

Es decir, $\cdot_{\mathbb{C}}$ es la multiplicación usual de números complejos. Se tiene que $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot_{\mathbb{C}})$ es también un espacio vectorial.

Generalizando lo anterior, el conjunto de n-uplas complejas

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$, con las operaciones heredadas de $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot_{\mathbb{C}})$, respectivamente.

3. El conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de matrices $m \times n$ con coeficientes reales, con la suma y producto por escalares que conocemos, es un espacio vectorial real. Haciendo un análisis parecido al del ejemplo anterior, el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ de matrices $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$, con las operaciones esperadas. Tenga en cuenta que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ si $a_{ij} \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$.

4. Sea $C^0[a, b]$ el conjunto de todas las funciones continuas con dominio $[a, b]$ y valores en $\mathbb{R}$. Dadas dos funciones continuas $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define la suma $f + g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ como la función dada por

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \text{ para todo } x \in [a, b],$$

y la función $\alpha \cdot f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha\, f(x), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Las operaciones que definen un espacio vectorial deben ser **cerradas**, es decir, que sus resultados sean elementos dentro del espacio vectorial. En este ejemplo, sabemos que la suma de funciones continuas es continua, y que una función continua multiplicada por un escalar da lugar a una función continua, por lo que las operaciones definidas son cerradas. Más aún, se tiene que $(C^0[a, b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

5. Sea $\mathcal{P}[x]$ el conjunto de polinomios (de cualquier grado) con coeficientes en $\mathbb{R}$, es decir, $p(x) \in \mathcal{P}[x]$ si

$$p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n,$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Si $p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \cdots + b_m\, x^m$ son dos polinomios (supongamos $n \leqslant m$ sin pérdida de generalidad), entonces se define la suma $p(x) + q(x)$ como

$$p(x) + q(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x + (a_2 + b_2)\, x^2 + \cdots + (a_n + b_n)\, x^n + b_{n+1}\, x^{n+1} + \cdots + b_m\, x^m.$$

Es decir, para sumar dos polinomios, sumamos los coeficientes correspondientes a cada grado. Dado un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se define el polinomio $\alpha\, p(x)$ como

$$\alpha\, p(x) := (\alpha a_0) + (\alpha a_1)\, x + (\alpha a_2)\, x^2 + \cdots + (\alpha a_n)\, x^n.$$

Se tiene entonces que $(\mathcal{P}[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Cerramos esta sección demostrando algunas propiedades que se cumplen dentro de todo espacio vectorial (y en particular, dentro de los ejemplos que acabamos de ver). Cuando en un resultado no se especifique quién es el cuerpo $\mathbb{K}$ a considerar, se entiende que el resultado es válido para cualquier $\mathbb{K}$.

Proposición 5.1

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces, las siguientes propiedades se cumplen:

1. El elemento neutro $0_V \in V$ es único.
2. Para cada $v \in V$, existe un único $w \in V$ tal que $v + w = 0_V$. Tal w lo denotaremos como $w = -v$. Es decir, el opuesto de cada vector en V es único.
3. $0 \cdot v = 0_V$, para todo $v \in V$.
4. $\alpha \cdot 0_V = 0_V$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
5. $\alpha \cdot v = 0_V$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o $v = 0_V$.
6. $(-1) \cdot v = -v$.

Idea de la demostración: En general, probar este tipo de propiedades sencillas tiene que ver con valernos casi exclusivamente de las propiedades de la definición de espacio vectorial. Cualquier argumento o cálculo a realizar debe estar justificado y ser válido dentro de V o $\mathbb{K}$. □

Demostración:

1. Supongamos que existe otro vector $0'_V \in V$ tal que

$$0'_V + v = v \text{ para todo } v \in V. \tag{5.1}$$

   Por otro lado, también sabemos que

$$0_V + v = v \text{ para todo } v \in V. \tag{5.2}$$

   Haciendo $v = 0_V$ en (5.1) se tiene que

$$0'_V + 0_v = 0_v,$$

   y haciendo $v = 0'_V$ en (5.2) se tiene que

$$0_V + 0'_v = 0'_v.$$

   Por la propiedad conmutativa de la suma en V, se tiene que

$$0_V + 0'_V = 0'_V + 0_v.$$

   Conectando las tres igualdades anteriores, se tiene que $0_V = 0'_V$.

2. Supongamos que existen $w, w' \in V$ tales que $v + w = 0_V = v + w'$. Sumamos w' a la igualdad $v + w = 0_V$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
v + w &= 0_V \\
w' + (v + w) &= w' + 0_V \\
(w' + v) + w &= w' && \text{(por la propiedad asociativa y del elemento neutro)} \\
(v + w') + w &= w' && \text{(por la propiedad conmutativa)} \\
0_V + w &= w' && \text{(ya que } 0_V = v + w'\text{)} \\
w &= w'. && \text{(por la propiedad el elemento neutro)}
\end{aligned}$$

3. Sabemos que en $\mathbb{K}$ se cumple que $0 + 0 = 0$. Multiplicando ambos lados de la igualdad por v, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(0+0)\cdot v &= 0\cdot v \\
0\cdot v + 0\cdot v &= 0\cdot v && \text{(propiedad distributiva)} \\
(0\cdot v + 0\cdot v) + [-(0\cdot v)] &= 0\cdot v + [-(0\cdot v)] \\
0\cdot v + [0\cdot v + [-(0\cdot v)]] &= 0_V && \text{(propiedad asociativa y del opuesto)} \\
0\cdot v + 0_V &= 0_V && \text{(propiedad del opuesto)} \\
0\cdot v &= 0_V. && \text{(propiedad del neutro)}
\end{aligned}$$

4. La prueba es análoga a la anterior, partiendo de que $0_V + 0_V = 0_V$.

5. La implicación $(\Longleftarrow)$ es consecuencia de las partes 3. y 4. Ahora, para probar $(\Longrightarrow)$ supongamos que $\alpha \cdot v = 0_V$. Hagamos un análisis por casos:

   - Si $\alpha = 0$, no hay nada que demostrar.
   - Podemos suponer entonces que $\alpha \neq 0$. Como en un cuerpo, todo elemento no nulo posee inverso multiplicativo, podemos considerar $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$. Entonces, si multiplicamos la igualdad $\alpha \cdot v = 0_V$ por α^{-1}, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot v) &= \alpha^{-1}\cdot 0_V \\
(\alpha^{-1}\alpha)\cdot v &= \alpha^{-1}\cdot 0_V && \text{(por la propiedad asociativa del producto por escalares)} \\
1\cdot v &= 0_V && \text{(por la parte 4.)} \\
v &= 0_V. && \text{(ya que 1 es el elemento neutro del producto por escalares)}
\end{aligned}$$

6. Sabemos que $0 \cdot v = 0_V$ por la parte 3. Por otro lado, podemos escribir 0 como $0 = 1 + (-1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(1+(-1))\cdot v &= 0_V \\
1\cdot v + (-1)\cdot v &= 0_V && \text{(por la propiedad distributiva)} \\
v + (-1)\cdot v &= 0_V. && \text{(ya que 1 es el elemento neutro del producto por escalares)}
\end{aligned}$$

   Por la unicidad del elemento opuesto de v, concluimos que $(-1)v = -v$.

$\square$

5.2. Subespacios vectoriales

Dado un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, es interesante preguntarse cuáles son los subconjuntos de V que retienen la estructura de espacio vectorial de V. Esto se representa en el siguiente concepto.

Definición 5.2

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $W \subseteq V$ un subconjunto no vacío de V. Diremos que W es un **subespacio vectorial** de V si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Para todo $w_1, w_2 \in W$, se tiene que $w_1 + w_2 \in W$. En otras palabras, la operación suma $+$ de V es cerrada sobre el subconjunto W.

2. Para todo $w \in W$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que $\alpha \cdot w \in W$. Es decir, la operación de producto por escalares es cerrada sobre el subconjunto W.

Observación 5.1

Si W es un subespacio vectorial de $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, entonces $0_V \in W$. En efecto, como W es distinto del conjunto vacío, podemos encontrar $w \in W$. Por un lado, $0 \cdot w \in W$ ya que W es un subespacio de V. Por otro lado, $0 \cdot w = 0_V$ por la proposición anterior. Por lo tanto, $0_V \in W$.

Obtenemos así un criterio para probar que un subconjunto W no es un subespacio de $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, a saber:

Si $0_V \notin W$, entonces W no es un subespacio de $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.

Antes de ver ejemplos de subespacios vectoriales, probaremos una propiedad que permite una verificación más rápida de que un subconjunto de un espacio vectorial es subespacio.

Proposición 5.2

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $W \subseteq V$ un subconjunto no vacío de V. Entonces, W es un subespacio vectorial de V si, y sólo si,

$$\alpha \cdot w_1 + w_2 \in W$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y $w_1, w_2 \in W$.

Demostración: La implicación $(\Longrightarrow)$ es consecuencia directa de la definición de subespacio vectorial. Ahora, para probar $(\Longleftarrow)$ (es decir, las propiedades 1. y 2. de la definición anterior), basta con hacer $\alpha = 1$ y $w_2 = 0_V$ (ver la observación anterior), respectivamente. $\square$

Ejemplo 29.

1. Dado un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, se tiene que $\{0_V\}$ y V son subespacios de V, conocidos como **subespacios triviales**.

2. Toda recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. En efecto, sea r la recta en $\mathbb{R}^3$ dada por
$$(x, y, z) = \lambda\, \vec{u},$$
donde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$. Es decir,
$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, y, z) = \lambda\, \vec{u}\}.$$
Para empezar, es claro que $r \neq \emptyset$, pues $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u} \in r$. Por otro lado, sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1\, \vec{u}, \lambda_2\, \vec{u} \in r$. Tenemos que
$$\lambda_1\, \vec{u} + \lambda_2\, \vec{u} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} \in r.$$
Por la Proposición 5.2, se tiene que r es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Si una recta no pasa por el origen, entonces no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ (ver la Observación 5.2).

3. Todo plano en $\mathbb{R}^3$ que pase por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. En efecto, consideremos el plano
$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, y, z) = \lambda\, \vec{u} + \mu\, \vec{v}\},$$

donde $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ son no nulos y no colineales. Claramente, $\vec{0} \in \pi$, ya que

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}.$$

Por otro lado, dados $\lambda_1\, \vec{u} + \mu_1\, \vec{v}$ y $\lambda_2\, \vec{u} + \mu_2\, \vec{v}$ elementos arbitrarios en π, se tiene que

$$(\lambda_1\, \vec{u} + \mu_1\, \vec{v}) \ + \ (\lambda_2\, \vec{u} + \mu_2\, \vec{v}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{v} \in \pi.$$

Por la Proposición 5.2, se tiene que π es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$, junto con los subconjuntos

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ A = A^t\},$$
$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ A = -A^t\},$$

es decir, $\mathcal{S}$ es el subconjunto de todas las matrices simétricas, y $\mathcal{A}$ el subconjunto de todas las matrices anti-simétricas. Respecto a $\mathcal{S}$, la matriz nula es claramente simétrica. Por otro lado, si A y B son dos matrices simétricas (de tamaño $n \times n$) y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\alpha\, A + B)^t = (\alpha\, A)^t + B^t = \alpha\, A^t + B^t = \alpha\, A + B.$$

Es decir, $\alpha\, A + B$ también es simétrica. Por lo tanto, $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. De manera similar, se puede ver que $\mathcal{A}$ también es un subespacio de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

5. Dentro del espacio vectorial $(C^0[a,b], \mathbb{R}, +, \cdot)$, considere el subconjunto

$$D[a,b] = \{f \in C^0[a,b] \ : \ f \text{ es derivable en } (a,b)\}.$$

Entonces, $D[a,b]$ es un subespacio de $C^0[a,b]$. Dejamos los detalles como ejercicio.

6. Sea (S) un sistema homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas. Entonces, $\mathrm{Sol}(S)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ (con las operaciones habituales). En efecto, supongamos que (S) viene dado de forma matricial por

$$A \cdot X = 0_{m\times 1},$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Claramente $0_{n\times 1} \in \mathrm{Sol}(S)$ (los sistemas homogéneos siempre tienen solución trivial). Por otro lado, si $X_1, X_2 \in \mathrm{Sol}(S)$ (es decir, $A \cdot X_1 = 0_{m\times 1}$ y $A \cdot X_2 = 0_{m\times 1}$) y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$A \cdot (\alpha\, X_1 + X_2) = \alpha\, A \cdot X_1 + A \cdot X_2 = \alpha \cdot 0_{m\times 1} + 0_{m\times 1} = 0_{m\times 1}.$$

Por lo tanto, $\alpha\, X_1 + X_2 \in \mathrm{Sol}(S)$.

Cerramos esta sección con el siguiente resultado.

Proposición 5.3: construcción de subespacios nuevos a partir de subespacios dados

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sea $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de V (es decir, W_n es un subespacio de V para todo $n \in \mathbb{N}$). Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ es un subespacio de V. Es decir, la intersección de una cantidad arbitraria de subespacios es un subespacio.

2. Si $W_n \subseteq W_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ es un subespacio de V. Es decir, la unión "encajada" de una cantidad arbitraria de subespacios es un subespacio.

Demostración:

1. Como $0_V \in W_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0_V \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$, de donde $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n \neq \emptyset$. Ahora, supongamos que $w_1, w_2 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ y que $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\alpha\, w_1 + w_2 \in W_n$, ya que cada W_n es un subespacio de V. Luego, por definición de intersección, tenemos que $\alpha\, w_1 + w_2 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ es un subespacio de V por la Proposición 5.2.

2. De forma análoga a la parte anterior, podemos notar que $0_V \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Ahora, sean $w_1, w_2 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $w_1 \in W_{n_1}$ y $w_2 \in W_{n_2}$ (por definición de unión de conjuntos). Si tomamos $m = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, tendremos que $W_1 \subseteq W_m$ y $W_2 \subseteq W_m$, de donde $w_1, w_2 \in W_m$. Al ser W_m subespacio de V, se tiene que $\alpha\, w_1 + w_2 \in W_m$. Por lo tanto, $\alpha\, w_1 + w_2 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Concluimos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ es un subespacio de V por la Proposición 5.2.

$\square$

En general, la unión de subespacios vectoriales de un espacio V no tiene por qué ser un subespacio de V, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 30. Considere $\mathbb{R}^2$ con las operaciones usuales, y los subespacios

$$W_1 = \{(x, 0) \, : \, x \in \mathbb{R}\},$$
$$W_2 = \{(0, y) \, : \, y \in \mathbb{R}\}.$$

Note que W_1 y W_2 corresponden con los ejes X e Y de $\mathbb{R}^2$, respectivamente, y en particular son rectas que pasan por el origen. En este caso, $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que $(1, 0) \in W_1 \cup W_2$ (pues $(1, 0) \in W_1$) y $(0, 1) \in W_1 \cup W_2$ (pues $(0, 1) \in W_2$) pero $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2$ (pues $(1, 1) \notin W_1$ y $(1, 1) \notin W_2$).

5.3. Subespacios generados

En esta sección nos vamos a concentrar en un tipo particular de subespacio vectorial, que se construye a partir del concepto de combinación lineal. Tales subespacios se conocen como subespacios generados. En la práctica, la mayoría de los subespacios que estudiaremos son de este tipo.

Definición 5.3

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ un subconjunto finito (puede ser vacío). Una **combinación lineal** de $\{v_1, \dots, v_k\}$ es cualquier vector $v \in V$ de la forma

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k,$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Por convención, diremos que $v \in V$ es combinación lineal de $\emptyset$ si, y sólo si, $v = 0_V$.

Un problema importante relacionado al concepto anterior es determinar cuándo un vector es combinación lineal de un conjunto finito dado de vectores. Trabajemos esto en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 31.

1. El vector $(1,3,0) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, ya que

$$(1,3,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 3 \cdot (0,1,0).$$

2. La matriz $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es combinación lineal de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, ya que

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Determinar si $(2,-1,10)$ combinación lineal de $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

   Para responder a esto, planteamos el problema según la definición de combinación lineal, es decir: ¿existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(2,-1,10) = \alpha_1 \cdot (1,0,0) + \alpha_2 \cdot (1,1,0) + \alpha_3 \cdot (1,1,1)\,?$$

   La igualdad anterior arrojará condiciones sobre α_1, α_2 y α_3 dentro de un sistema de ecuaciones lineales. En efecto, de dicha igualdad se desprende que

$$(2,-1,10) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3),$$

   y usando la relación de igualdad en $\mathbb{R}^3$, se tiene el sistema

$$(S):\ \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 2, \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= -1, \\ \alpha_3 &= 10. \end{aligned} \right.$$

   Al resolver este sistema, se obtiene $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -11$ y $\alpha_3 = 10$, es decir,

$$(2,-1,10) = 3 \cdot (1,0,0) - 11 \cdot (1,1,0) + 10 \cdot (1,1,1).$$

   Por lo tanto, $(2,-1,10)$ es combinación lineal de $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.
   Note que si planteamos el sistema de forma matricial, se obtiene la matriz ampliada

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right),$$

   es decir, $(A|b)$ se obtiene colgando los vectores de $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y $(2,-1,10)$ como columnas.

4. Determinar si $-2x^2 + 8x - 5 \in \mathcal{P}_2[x]$ es combinación lineal de $\{x^2+1, x-1, 2x+2\}$.

   Procedemos de manera similar al ejemplo anterior, es decir, planteamos la igualdad

$$-2x^2 + 8x - 5 = \alpha_1 \cdot (x^2+1) + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(2x+2).$$

   Luego, trabajando el segundo lado de la igualdad según las operaciones de suma y producto por escalares de $\mathcal{P}_2[x]$, se obtiene

$$-2x^2 + 8x - 5 = \alpha_1 x^2 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3).$$

Finalmente, a partir de la relación de igualdad en $\mathcal{P}_2[x]$, tenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$(S): \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= -5, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 8, \\ \alpha_1 &= -2. \end{aligned} \right.$$

Al resolver el sistema anterior, se obtiene $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 11/2$ y $\alpha_3 = 5/4$. Por lo tanto,

$$-2x^2 + 8x - 5 = -2 \cdot (x^2 + 1) + \frac{11}{2} \cdot (x - 1) + \frac{5}{4} \cdot (2x + 2),$$

y $-2x^2 + 8x - 5$ es combinación lineal de $\{x^2 + 1, x - 1, 2x + 2\}$.

Pasemos ahora a considerar el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales que se pueden obtener a partir de un conjunto finito dado de vectores.

Definición 5.4

Sea $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ un subconjunto finito (puede ser vacío) de un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Se define el **conjunto generado** por $\mathcal{A}$ como

$$[\mathcal{A}] := \{v \in V \ / \ v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k, \ \text{ con } \ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$

Otra notación alternativa es $[v_1, \dots, v_k]$. Para el caso donde $\mathcal{A} = \varnothing$, se tiene que $[\varnothing] = \{0_V\}$. Al conjunto $\mathcal{A}$ se le llama **generador** de $[\mathcal{A}]$.

Proposición 5.4

El conjunto $[\mathcal{A}]$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración: Trabajaremos el caso donde $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_k\} \neq \varnothing$, ya que para $\mathcal{A} = \varnothing$ tenemos que $[\varnothing] = \{0_V\}$ es claramente un subespacio de V.

Lo primero que notamos es que $0_V \in [\mathcal{A}]$, ya que

$$0_V = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_k.$$

Ahora, sean $v, v' \in [\mathcal{A}]$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k, \\ v' &= \alpha'_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha'_k \cdot v_k. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v + v' &= \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k) + (\alpha'_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha'_k \cdot v_k) \\ &= (\lambda\alpha_1 + \alpha'_1) \cdot v_1 + \cdots + (\lambda\alpha_k + \alpha'_k) \cdot v_k \in [\mathcal{A}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $[\mathcal{A}]$ es un subespacio vectorial de V por la Proposición 5.2. □

Ejemplo 32. Encontremos conjuntos generadores para algunos subespacios conocidos:

1. Sea r la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y de dirección $\vec{u} \neq \vec{0}$. Entonces, podemos notar que
$$r = [\vec{u}].$$

2. Análogamente, si π denota al plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y de direcciones $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ no colineales, entonces
$$\pi = [\vec{u}, \vec{v}].$$
¿Cómo podemos hallar un conjunto generador de un plano que pasa por el origen si no nos dan sus vectores de dirección? Supongamos que π es el plano dado por la ecuación reducida
$$2x - 3y + z = 0.$$
Determinamos a partir de la ecuación anterior tres puntos del plano que no estén alineados, como por ejemplo $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 0, -4)$ y $C = (0, 0, 0)$. Luego, un par de direcciones para el plano π pueden ser
$$\vec{u} = A - C = (1, 1, 1),$$
$$\vec{v} = B - C = (2, 0, -4).$$
Por lo tanto,
$$\pi = [(1, 1, 1), (2, 0, -4)].$$
Tenga en cuenta que existe más de una posibilidad para calcular los vectores de dirección de π. Por lo tanto, π puede tener más de un conjunto generador. En general, un subespacio generado puede tener más de un conjunto generador. Para apreciar esto último en el caso de π, procedamos de otra manera. Tenga en cuenta que π es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado por todos los puntos (x, y, z) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $2x - 3y + z = 0$. En otras palabras, los puntos de π son todos aquéllos de la forma $(x, y, 3y - 2x)$ (despejamos z de la ecuación reducida del plano). Luego, podemos hacer una descomposición de $(x, y, 3y - 2x)$ de la siguiente manera:
$$(x, y, 3y - 2x) = (x, 0, -2x) + (0, y, 3y) = x \cdot (1, 0, -2) + y \cdot (0, 1, 3).$$
Entonces, vemos que un conjunto generador del plano π viene dado por $\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$, es decir,
$$\pi = [(1, 0, -2), (0, 1, 3)].$$

3. Consideremos el subespacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas de tamaño 2×2 y con coeficientes reales. Hallemos un conjunto generador de $\mathcal{S}$.

   Para este tipo de problemas, es muy importante tener el cuenta cómo son los vectores en el subespacio en cuestión. Tomemos entonces una matriz $A \in \mathcal{S}$ arbitraria, es decir,
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \text{ donde } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$
Notamos que
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$
$$A = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $A \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ para toda $A \in \mathcal{S}$, es decir,

$$\mathcal{S} \subseteq \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Por otro lado, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$, por lo que cualquier combinación lineal de las matrices anteriores también pertenece a $\mathcal{S}$, ya que $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Por lo tanto,

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \subseteq \mathcal{S}.$$

Se tiene entonces que

$$\mathcal{S} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Un error común a la hora de declarar algún conjunto generador para un determinado espacio o subespacio vectorial en el siguiente. Considere los ejemplos 2. y 3. anteriores. No es correcto decir que π o $\mathcal{S}$ están generados por los subconjuntos

$$\{(x,0,-2x)+(0,y,3y)\} \text{ y } \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \right\},$$

respectivamente, ya que se da a entender que los valores de x e y en el primer conjunto, y de α_1, α_2 y α_3 en el segundo, pueden variar arbitrariamente dentro de $\mathbb{R}$, dando lugar así a conjuntos generadores con infinitos vectores.

5.4. Independencia lineal

Como mencionamos en el ejemplo anterior, un espacio o subespacio vectorial puede tener más de un conjunto generador. Si vamos al caso del subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas,

$$\mathcal{S} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

vemos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ también es un conjunto generador de $\mathcal{S}$. Este último conjunto contiene "información redundante" a la hora de describir a los vectores de $\mathcal{S}$, en el siguiente sentido:

1. Por un lado, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal del resto de los vectores del conjunto generador, ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Por otro lado, los vectores en $\mathcal{S}$ se pueden escribir de varias maneras (no necesariamente única) como combinación lineal de los vectores de $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Por ejemplo,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
y
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En álgebra lineal, nos interesa describir espacios o subespacios generados W a partir de la menor cantidad posible de información, es decir, hallando un conjunto generador $\mathcal{A}$ con la cantidad mínima de vectores necesarios. Esto se traduce en que si $W = [\mathcal{A}]$, entonces todo vector de W se escribe de forma única como combinación lineal de vectores de $\mathcal{A}$. Esta última propiedad tiene que ver con el concepto de *independencia lineal*, que desarrollaremos en esta sección.

Definición 5.5

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un subconjunto finito de V. Al elemento neutro 0_V podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{A}$ de la siguiente manera:
$$0_V = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n.$$
A tal combinación lineal la llamaremos **combinación lineal trivial**. Diremos que $\mathcal{A}$ es **linealmente independiente** si la única manera de escribir 0_V como combinación lineal de $\mathcal{A}$ es mediante la combinación lineal trivial. Dicho de otra manera, si
$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V$$
es una combinación lineal del elemento neutro (donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$), entonces
$$\alpha_1 = 0, \ \ldots, \ \alpha_n = 0.$$
Si $\mathcal{A}$ no es linealmente independiente, diremos que es **linealmente dependiente**.

Observación 5.2

Si $\mathcal{A}$ (como en la definición anterior) es linealmente dependiente, entonces existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, no nulo, tal que
$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V.$$
Esto implica que podemos despejar v_i de la expresión anterior:
$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \cdot v_n.$$
Luego, $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n]$.

Veamos algunos ejemplos concretos y cómo probar si un conjunto dado es linealmente independiente o no.

Ejemplo 33.

1. $\{(1,0),(0,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^2$. En efecto, si suponemos que

$$\alpha_1 \cdot (1,0) + \alpha_2 \cdot (0,1) = (0,0),$$

tendremos que $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$, lo cual implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2. Determine si el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(1,1,2,4),(2,-1,-5,2),(1,-1,-4,0),(2,1,1,6)\}$$

es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^4$.

Supongamos que

$$\alpha_1 \cdot (1,1,2,4) + \alpha_2(2,-1,-5,2) + \alpha_3(1,-1,-4,0) + \alpha_4(2,1,1,6) = (0,0,0,0).$$

Entonces, usando las operaciones de suma y producto por escalares en $\mathbb{R}^4$, tenemos que

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4, 2\alpha_2 - 5\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4, 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_4) = (0,0,0,0).$$

Ahora, usando la relación de igualdad de $\mathbb{R}^4$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales **homogéneo** a partir de la igualdad anterior (igualando componente-a-componente):

$$(S)\colon \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ 2\alpha_2 - 5\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Resolvemos el sistema anterior escalerizando la matriz asociada de (S) (que también se obtiene colgando los vectores de $\mathcal{A}$ como columnas):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{escalerización}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que (S) es un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones), por lo cual $\mathcal{A}$ es un conjunto linealmente dependiente. Para entender por qué se concluye esto al saber qué tipo de sistema es (S), recordemos que un conjunto es linealmente dependiente si el elemento neutro se puede escribir de varias maneras como combinación lineal de los vectores de dicho conjunto. En este ejemplo, tenemos que

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \alpha_1 = \frac{1}{3}\alpha_3 - \frac{4}{3}\alpha_4 \ \text{y} \ \alpha_2 = -\frac{2}{3}\alpha_3 - \frac{1}{3}\alpha_4\right\}.$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{3}\alpha_3 - \frac{4}{3}\alpha_4\right) \cdot (1,1,2,4) + \left(-\frac{2}{3}\alpha_3 - \frac{1}{3}\alpha_4\right)(2,-1,-5,2) + \alpha_3(1,-1,-4,0) + \alpha_4(2,1,1,6) = (0,0,0,0).$$

Haciendo $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, obtenemos la combinación lineal trivial para $(0,0,0,0)$. Pero si hacemos $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = -1$, también nos queda que

$$\begin{aligned}(0,0,0,0) &= \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)\cdot(1,1,2,4) + \left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)(2,-1,-5,2) + (1,-1,-4,0) - (2,1,1,6) \\ &= \frac{5}{3}\cdot(1,1,2,4) - \frac{1}{3}(2,-1,-5,2) + (1,-1,-4,0) - (2,1,1,6),\end{aligned}$$

teniendo así dos maneras diferentes (de hecho, infinitas) de representar a $(0,0,0,0)$ como combinación lineal de $\mathcal{A}$.

3. Determine si el conjunto $\mathcal{A} = \{x^2+1, x-1, 2x+2\}$ del Ejemplo 31 - 4. es un conjunto linealmente independiente de $\mathcal{P}_2(x)$.

   Supongamos que
   $$\alpha_1\cdot(x^2+1) + \alpha_2\cdot(x-1) + \alpha_3\cdot(2x+2) = 0.$$
   Procediendo como en el citado ejemplo, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:
   $$(S)\colon \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \qquad\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \qquad\qquad\quad \alpha_1 = 0. \end{cases}$$
   Al escalerizar su matriz asociada, se obtiene
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{escalerización}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Entonces, (S) es un sistema compatible determinado, y por lo tanto $\mathcal{A}$ es un conjunto linealmente independiente.

4. Determine si el conjunto $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ del Ejemplo 32 - 3. es un conjunto linealmente independiente de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   Supongamos que
   $$\alpha_1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Luego,
   $$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   de donde claramente se tiene que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es linealmente independiente.

Pasemos ahora a hacer algunas observaciones del concepto de independencia lineal.

Observación 5.3

1. Podemos incluir al conjunto vacío dentro de la definición de conjunto linealmente independiente. Es decir, $\emptyset$ es linealmente independiente dentro de cualquier espacio vectorial. En efecto, de suponer lo contrario, es decir que $\emptyset$ es linealmente dependiente, se tendría que **existe** $v \in \emptyset$ que se puede escribir como combinación lineal no trivial de vectores en $\emptyset$. La expresión $v \in \emptyset$ es una contradicción, pues no existen elementos en $\emptyset$.

2. Si $\mathcal{A} \subseteq V$ es un subconjunto finito linealmente independiente y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ también es linealmente independiente.

3. Si $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ es un subconjunto finito y $0_V \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente. En efecto, si $0_V = v_i \in \mathcal{A}$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces podemos escribir 0_V como combinación lineal no trivial de vectores en $\mathcal{A}$:

$$0_V = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot 0_V + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

4. Dado $v \in V$, se tiene que $\{v\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $v = 0_V$.

Probemos a continuación la propiedad de unicidad mencionada anteriormente para los conjuntos generadores linealmente independientes.

Proposición 5.5

Sea $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ un subconjunto finito y no vacío de un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Entonces, $\mathcal{A}$ es linealmente independiente si, y sólo si, para cada $v \in [\mathcal{A}]$ existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ **únicos** tales que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Demostración: Supongamos primero que $\mathcal{A}$ es linealmente independiente. Sea $v \in [\mathcal{A}]$. Luego, por definición de subespacio generado por $\mathcal{A}$, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Supongamos además que

$$v = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n,$$

donde $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$. Luego,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = v = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n.$$

Tenemos entonces la siguiente combinación trivial del elemento neutro 0_V:

$$0_V = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot v_n.$$

Como $\mathcal{A}$ es linealmente independiente, se tiene que $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$. Es decir, $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_n = \alpha_n$. Se tiene entonces que la combinación lineal

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

es única.

Ahora, supongamos que todo elemento de $[\mathcal{A}]$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de vectores en $\mathcal{A}$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$0_V = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Como $0_V \in [\mathcal{A}]$, la combinación lineal anterior es única. Por otro lado,

$$0_V = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n,$$

de donde $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es linealmente independiente. $\square$

Cerraremos esta sección con una aplicación del concepto de independencia lineal a la teoría de matrices. Concretamente, veremos un par de formas equivalentes de calcular el rango de cualquier matriz.

Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

recordemos que

$$F_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i\,n-1} & a_{in} \end{pmatrix} \text{ y } C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{m-1\,j} \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

denotan la i-ésima fila y j-ésima columna de A, y que pueden considerarse como vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Teniendo esta notación repasada, presentamos la siguiente definición.

Definición 5.6

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se define el **rango por filas** de A, denotado como $\mathrm{rg}_f(A)$, como la mayor cantidad de filas F_i que forman un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, se define el **rango por columnas** de A, denotado como $\mathrm{rg}_c(A)$, como la mayor cantidad de columnas C_j que forman un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^m$.

Enunciaremos el siguiente teorema sin demostración, aunque sí veremos como aplicarlo para calcular el rango de una matriz.

Teorema 5.1

Para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}_f(A) = \mathrm{rg}_c(A).$$

Ejemplo 34. Calcule el rango, el rango por filas, y el rango por columnas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primero, escalerizamos para calcular $\operatorname{rg}(A)$:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cantidad de escalones de la forma escalerizada reducida de A es 2, de donde

$$\operatorname{rg}(A) = 2.$$

Para calcular el rango por filas de A, consideramos su conjunto de filas de A

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3\}.$$

Vemos que $F_3 = 1 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2$. Luego, $\mathcal{F}$ es linealmente dependiente. Si descartamos F_3, nos queda el subconjunto $\{F_1, F_2\} \subseteq \mathcal{F}$. Claramente, F_2 no es múltiplo escalar de F_1, ni viceversa, por lo cual $\{F_1, F_2\}$ es linealmente independiente. Vemos entonces que

$$\operatorname{rg}_f(A) = 2.$$

Ahora calculemos el rango por columnas de A. Consideremos el conjunto de columnas de A:

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}.$$

Vemos que $C_3 = -3 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$ y $C_4 = 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2$, por lo cual $\mathcal{C}$ es linealmente dependiente. Descartamos entonces C_3 y C_4, obteniendo el subconjunto $\{C_1, C_2\} \subseteq \mathcal{C}$, el cual claramente es linealmente independiente. Tenemos entonces que

$$\operatorname{rg}_c(A) = 2.$$

Como corolario del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1

Las siguiente condiciones son equivalente para toda matriz (cuadrada) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

(a) A es invertible.

(b) Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$.

(c) Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$.

Demostración: Recuerde que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible si, y sólo si, $\operatorname{rg}(A) = n$. Por otro lado, del teorema anterior se tiene que $\operatorname{rg}_f(A) = \operatorname{rg}(A)$. Si A es invertible, se tiene que $\operatorname{rg}_f(A) = n$, es decir, que la mayor cantidad de filas de A que forman un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ es n. Por lo tanto, las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$. Recíprocamente, si todas las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}_f(A) = n$, por lo cual A es invertible.

Análogamente, se tiene que A es invertible si, y sólo si, sus columnas forman un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$. □

5.5. Bases y dimensión de un espacio vectorial

Trabajaremos ahora con un concepto que engloba las nociones de generador y de independencia lineal de manera simultánea. Antes de presentarlo, haremos una distinción entre los dos tipos de espacios vectoriales que existen, según su cantidad de generadores.

Definición 5.7

Un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es **finito-dimensional** o **de dimensión finita** si existe un subconjunto finito $\mathcal{A} \subseteq V$ tal que $V = [\mathcal{A}]$. De no ocurrir esto último, diremos que V es **infinito-dimensional** o **de dimensión infinita**.

Nos centraremos en el estudio de espacios vectoriales finito-dimensionales, ya que los conceptos de conjunto generador e independencia lineal los hemos trabajado para conjuntos finitos. Sin embargo, estos conceptos también existen en la teoría de espacios vectoriales de dimensión infinita. Veamos algunos ejemplos de ambos tipos de espacios vectoriales.

Ejemplo 35. Los siguientes son ejemplos de espacios vectoriales infinito-dimensionales.

1. El conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con la suma y producto por escalares usuales de funciones.
2. El espacio vectorial $\mathcal{P}[x]$ de todos los polinomios (cualquier grado), con las operaciones usuales.

Ejemplo 36. Los siguientes son ejemplos de espacios vectoriales finito-dimensionales.

1. El espacio de n-uplas $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales.

   Por ejemplo, es fácil notar que $\mathbb{R}^2$ es finito-dimensional, ya que está generador por
   $$\{(1,0),(0,1)\}.$$
   En efecto, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que
   $$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$
   Similarmente, $\mathbb{R}^3$ está generador por
   $$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$
   Y de manera más general, $\mathbb{R}^n$ está generado por el conjunto de vectores
   $$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$
   donde 1 aparece en la i-ésima entrada, y el resto de las entradas valen 0.
2. El conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ genera al espacio vectorial $\mathcal{P}_n[x]$ de polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes reales.
3. Sean m y n números naturales no nulos, $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea E_{ij} la matriz donde todas las entradas valen 0, con excepción de la entrada ij, que vale 1. Entonces, podemos notar que el conjunto $\{E_{ij} \,/\, i = 1, \ldots, m \text{ y } j = 1, \ldots, n\}$ es un generador de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Observación 5.4

Si $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial finito-dimensional, entonces todo subespacio de V también lo es. Sin embargo, un espacio vectorial infinito-dimensional puede contener subespacios finito-dimensionales, como por ejemplo $\mathcal{P}[x]$, que contiene a $\mathcal{P}_n[x]$ como subespacio.

Por el resto de esta sección, $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ será un espacio vectorial finito-dimensional.

Definición 5.8

Una **base** de V es un subconjunto finito $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ tal que:

1. $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.
2. $V = [\mathcal{B}]$.

Observación 5.5

Por la Proposición 5.4, tenemos que $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V si, y sólo si, para cada $v \in V$ existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ **únicos** tales que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

A los escalares α_i dentro de la combinación lineal anterior se les conoce como **coordenadas** de v en la base $\mathcal{B}$, y se indican mediante la notación

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}).$$

Ejemplo 37.

1. Los conjuntos generadores mencionados en el Ejemplo 36 son además conjuntos linealmente independientes (la prueba de esto se la dejamos al lector). Por lo tanto, los conjuntos

   $$\{e_i \,/\, i = 1, \dots, n\}, \;\; \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \text{ y } \{E_{ij} \,/\, i = 1, \dots, m \text{ y } j = 1, \dots, n\}$$

   son bases de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n[x]$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, respectivamente, y se conocen como **bases canónicas**.

   Para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con la base $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$, se tiene por ejemplo que

   $$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}((3,2)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   ya que $(3,2) = 3 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)$.

- El orden de los vectores que forman una base es importante, ya que éste influye en las coordenadas de cualquier vector. Por ejemplo, si consideramos la base $\mathcal{B}' = \{(0,1),(1,0)\}$, entonces
$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}'}((3,2)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$
ya que $(3,2) = 2 \cdot (0,1) + 3 \cdot (1,0)$.

> Si bien $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son iguales como conjuntos, son considerados como **bases distintas**, ya que el orden influye en el cálculo de coordenadas y en otro tipo de construcciones (que detallaremos en el siguiente capítulo).

- Acabamos de ver que $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}((3,2)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, es decir, que las coordenadas de $(3,2)$ en la base canónica coinciden con lo que entendemos como coordenadas de un punto en el plano $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, esta coincidencia no siempre se da. Por ejemplo, si consideramos la base $\mathcal{B}'' = \{(1,1),(0,-1)\}$, tenemos entonces que $(3,2) = 3 \cdot (1,1) + 1 \cdot (0,-1)$, de donde
$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}''}((3,2)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para el espacio vectorial $\mathcal{P}_2[x]$ con la base canónica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, las coordenadas de cualquier polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ en dicha base vienen dadas por
$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(p(x)) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

De manera similar, para el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con la base canónica
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$
tenemos que las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en esta base vienen dadas por
$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

2. Hallar una base del plano π cuya ecuación reducida viene dada por $2x - y + 3z = 0$. Para la base calculada, determine las coordenadas del punto $(1,-1,-1) \in \pi$.

   Sea $(x,y,z) \in \pi$ arbitrario. Luego, debe cumplirse que $2x - y + 3z = 0$. Despejando y, se tiene que $y = 2x + 3z$. Por lo tanto, el punto (x,y,z) en π pasa a tener la forma
$$(x,y,z) = (x, 2x+3z, z) = x \cdot (1,2,0) + z \cdot (0,3,1).$$

Vemos así que $\mathcal{B} = \{(1,2,0),(0,3,1)\}$ es un conjunto generador de π, que además claramente es linealmente independiente. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base de π. Para el punto $(1,-1,-1)$, se tiene en particular que

$$(1,-1,-1) = 1 \cdot (1,2,0) + (-1) \cdot (0,3,1),$$

por lo cual

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}((1,-1,-1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son las coordenadas de $(1,-1,-1)$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ respecto a la base canónica, pero sus coordenadas en el plano π respecto a la base $\mathcal{B}$ son $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Encuentre una base para el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \,/\, x_1 = 3x_2 \text{ y } x_3 = 7x_4\}.$$

Procedemos de manera similar al ejemplo anterior. Para $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in W$, tenemos que

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (3x_2,x_2,7x_4,x_4,x_5) = x_2 \cdot (3,1,0,0,0) + x_4 \cdot (0,0,7,1,0) + x_5 \cdot (0,0,0,0,1).$$

Tenemos entonces que

$$W \subseteq [(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1)].$$

Como $(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1) \in W$, la contención contraria también se cumple. Por lo tanto, W es el subespacio generado por $\mathcal{B} = \{(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1)\}$. El conjunto anterior además es linealmente independiente, por lo que forma una base de W. Para verificar la independencia lineal, podemos por ejemplo aplicar el Teorema 5.4. En efecto, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenida al colgar los vectores de $\mathcal{B}$ como columnas, tiene rango igual a 3. Lo anterior es fácil de verificar.

4. Demostrar que $\mathcal{B} = \{1+2x+3x^2, 4+x^2, 3-x-5x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2[x]$, y hallar las coordenadas de cualquier polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ en $\mathcal{B}$.

Se puede hacer la verificación de que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y que genera a todo el espacio $\mathcal{P}_2[x]$ de manera simultánea. En efecto, recuerde que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{P}_2[x]$ si, y solo si, para cada $p(x) = a + bx + cx^2$ en $\mathcal{P}_2[x]$ existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ únicos tales que

$$a + bx + cx^2 = \alpha_1 \cdot (1 + 2x + 3x^2) + \alpha_2 \cdot (4 + x^2) + \alpha_3 \cdot (3 - x - 5x^2).$$

Es decir,

$$a + bx + cx^2 = (\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3) + (2\alpha_1 - \alpha_3)x + (3\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3)x^2.$$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$(S)\colon \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = a, \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 = b, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 = c. \end{cases}$$

Tenemos entonces que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{P}_2[x]$ si, y sólo si, para cada $p(x)$ el sistema (S) es compatible determinado. Procedemos entonces a escalerizar la matriz asociada a dicho sistema:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & a \\ 2 & 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & -5 & c \end{array}\right) \xrightarrow{\text{escalerización}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{a+23b-4c}{35} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{a-2b+c}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2a+11b-8c}{35} \end{array}\right)$$

Vemos entonces que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{P}_2[x]$. Además,

$$\alpha_1 = \frac{a+23b-4c}{35}, \quad \alpha_2 = \frac{a-2b+c}{5} \text{ y } \alpha_3 = \frac{2a+11b-8c}{35},$$

de donde

$$a+bx+cx^2 = \frac{(a+23b-4c)}{35}\cdot(1+2x+3x^2)+\frac{(a-2b+c)}{5}\cdot(4+x^2)+\frac{(2a+11b-8c)}{35}\cdot(3-x-5x^2),$$

es decir,

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} \dfrac{(a+23b-4c)}{35} \\ \dfrac{(a-2b+c)}{5} \\ \dfrac{(2a+11b-8c)}{35} \end{pmatrix}.$$

En particular, para el polinomio $1-x+2x^2$ se tiene que

$$1-x+2x^2 = -\frac{6}{7}(1+2x+3x^2)+(4+x^2)-\frac{5}{7}(3-x-5x^2) \text{ y } \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(1-x+2x^2) = \begin{pmatrix} -6/7 \\ 1 \\ -5/7 \end{pmatrix}.$$

Dedicaremos el resto de esta sección a la presentación, demostración y aplicación de resultados teóricos. Comenzaremos probando que todo espacio vectorial finito-dimensional tiene una base.

Observación 5.6

La afirmación anterior también es válida para espacios vectoriales infinito-dimensionales. En otras palabras, todo espacio vectorial tiene una base. La demostración de este hecho para el caso infinito-dimensional requiere de herramientas que escapan a los contenidos de este curso.

Teorema 5.2

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial, donde $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ es un subconjunto finito de V tal que $V = [\mathcal{A}]$. Entonces, existe un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ linealmente independiente tal que $V = [\mathcal{B}]$, es decir, $\mathcal{B}$ es una base de V contenida en $\mathcal{A}$.

Idea de la demostración: Se propone un algoritmo para detectar aquéllos vectores de $\mathcal{A}$ que son combinación lineal del resto de vectores de $\mathcal{A}$. Se hace esto de manera inductiva, hasta obtener $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ linealmente independiente. Debido al procedimiento a utilizar, resultará además que $V = [\mathcal{B}]$. $\square$

Demostración: Si $\mathcal{A}$ es linealmente independiente, no hay nada que demostrar. Basta con tomar $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Entonces, supongamos que $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente. Por la Observación 5.4, tenemos que existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m].$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = m$. Luego,

$$v_m \in [v_1, \ldots, v_{m-1}].$$

Veamos ahora que $V = [v_1, \ldots, v_{m-1}]$. Sea $v \in V = [v_1, \ldots, v_m]$. Entonces, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_m \cdot v_m. \tag{5.3}$$

Por otro lado, como $v_m \in [v_1, \ldots, v_{m-1}]$, existen $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1} \in \mathbb{K}$ tales que

$$v_m = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_{m-1} \cdot v_{m-1}. \tag{5.4}$$

Sustituyendo (5.4) en (5.3), se obtiene

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_m \cdot (\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_{m-1} \cdot v_{m-1}) = (\alpha_1 + \alpha_m \beta_1) \cdot v_1 + \cdots + (\alpha_{m-1} + \alpha_m \beta_{m-1}) \cdot v_{m-1},$$

es decir, $v \in [v_1, \ldots, v_{m-1}]$. Por lo tanto, $V = [v_1, \ldots, v_{m-1}]$.

Si $\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ es linealmente independiente, entonces tomamos $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$, concluyendo así la demostración. Si no, repetimos el procedimiento anterior para $V = [v_1, \ldots, v_{m-1}]$, y el número de veces que sea necesario. Tal número de veces es finito, ya que V es finito-dimensional. Por lo tanto, al final de la iteración llegaremos a obtener $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ linealmente independiente tal que $V = [\mathcal{B}]$. $\square$

Sabiendo ahora que todo espacio vectorial finito-dimensional tiene una base, nos concentraremos en demostrar que cualquier base de un mismo espacio vectorial siempre tiene la misma cantidad de vectores.

Proposición 5.6

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, si $\mathcal{A} \subseteq V$ es un subconjunto linealmente independiente, se tiene que

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) \leqslant n,$$

donde $\operatorname{card}(\mathcal{A})$ denota el **cardinal** (o la **cardinalidad**) de $\mathcal{A}$ (es decir, el número de elementos del conjunto $\mathcal{A}$).

Idea de la demostración: Haremos la prueba de la afirmación contrarrecíproca, es decir, supondremos que $\operatorname{Card}(\mathcal{A}) > n$ para probar que $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente. La idea central es escribir cada vector de $\mathcal{A}$ como combinación lineal de vectores en $\mathcal{B}$, ya que $V = [\mathcal{B}]$. Por otro lado, consideraremos una combinación lineal arbitraria de 0_V. A partir de lo anterior, construiremos un sistema de ecuaciones homogéneo, y aplicaremos el Teorema de Rouché-Frobenius para concluir que dicho sistema es compatible indeterminado. $\square$

Demostración: Sea $\mathcal{A} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ con $m > n$. Para demostrar que $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente, veremos que hay al menos una combinación lineal

$$\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_m \cdot w_m = 0_V \tag{5.5}$$

del elemento neutro donde no todos los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ son cero.

Como $V = [v_1, \ldots, v_n]$, para cada $w_j \in \mathcal{A}$ existen escalares $a_{1j}, \ldots, a_{nj} \in \mathbb{K}$ tales que

$$w_j = a_{1j} \cdot v_1 + \cdots + a_{nj} \cdot v_n. \tag{5.6}$$

Sustituyendo cada (5.6) en (5.5), tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot (a_{11} \cdot v_1 + \cdots + a_{n1} \cdot v_n) + \cdots + \alpha_m \cdot (a_{1m} \cdot v_1 + \cdots + a_{nm} \cdot v_n) &= 0_V \\ (a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1m}\alpha_m) \cdot v_1 + \cdots + (a_{n1}\alpha_1 + \cdots + a_{nm}\alpha_m) \cdot v_n &= 0_V. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente, los escalares de la combinación lineal anterior son todos nulos. En otras palabras, obtenemos el sistema de ecuaciones homogéneo

$$(S) : \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1m}\alpha_m = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + \cdots + a_{nm}\alpha_m = 0. \end{cases}$$

La matriz asociada del sistema anterior viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Al ser $m > n$ (más incógnitas que ecuaciones), por un corolario del Teorema de Rouché-Frobenius se tiene que (S) es un sistema compatible indeterminado. En conclusión, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que se cumple (5.5). $\square$

Como aplicación del resultado anterior, tenemos lo siguiente.

Corolario 5.2

Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de un espacio $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, entonces $\operatorname{card}(\mathcal{B}_1) = \operatorname{card}(\mathcal{B}_2)$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Como $\mathcal{B}_2$ es una base de V y $\mathcal{B}_1$ es un conjunto linealmente independiente, tenemos por la proposición anterior que

$$n \leqslant m.$$

De manera similar, intercambiando los roles de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, tenemos que

$$m \leqslant n.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}_1) = n = m = \operatorname{card}(\mathcal{B}_2).$$

$\square$

Gracias al corolario anterior, tenemos el concepto de dimensión de un espacio vectorial.

Definición 5.9

Se define la **dimensión** de un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ como

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \operatorname{card}(\mathcal{B}),$$

donde $\mathcal{B}$ es cualquier base de V.

Observación 5.7

Si bien nos estamos concentrando en espacios vectoriales reales (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), **la dimensión de un espacio vectorial puede depender de cual cuerpo $\mathbb{K}$ consideremos**. Por ejemplo, el conjunto $V = \mathbb{C}$ de números complejos tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. En el primer caso, la multiplicación por escalares $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se define como

$$\alpha \cdot (a + i\, b) = (\alpha a) + i\,(\alpha b).$$

En el segundo caso, $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se define como

$$(\alpha + i\,\beta) \cdot (a + i\, b) = (\alpha a - \beta b) + i\,(\alpha b + a\beta).$$

Si consideramos a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial real, tenemos que $\{1, i\}$ es una base de $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$. Por otro lado, $\{1\}$ es base de $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$. Tenemos entonces que

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 \text{ y } \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1.$$

Como aplicación adicional de la Proposición 5.5, podemos notar que cualquier subconjunto finito linealmente independiente de un espacio vectorial, cuya cardinalidad sea estrictamente menor a la dimensión del espacio, no alcanza para generar a dicho espacio.

Corolario 5.3

Si $\mathcal{B}$ es una base de un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $\mathcal{A} \subseteq V$ es un subconjunto linealmente independiente con $\operatorname{card}(\mathcal{A}) < \operatorname{card}(\mathcal{B})$, entonces $\mathcal{A}$ no es un conjunto generador de V.

Demostración: En efecto, en caso de cumplirse que $V = [\mathcal{A}]$, se tendría que $\mathcal{A}$ es una base de V, por ser además linealmente independiente. De donde $\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$, lo cual es una contradicción. $\square$

En el Teorema 5.5 estudiamos cómo extraer una base de un espacio vectorial a partir de un conjunto generador de dicho espacio. Presentamos a continuación el procedimiento complementario, es decir, cómo completar un conjunto linealmente independiente de un espacio vectorial a una base del mismo.

Teorema 5.3

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathcal{A} \subseteq V$ un subconjunto linealmente independiente. Entonces, existe un subconjunto finito $\mathcal{B} \subseteq V$ linealmente independiente tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $V = [\mathcal{B}]$. Es decir, $\mathcal{B}$ es una base de V que contiene a $\mathcal{A}$.

Idea de la demostración: La idea es agregar al conjunto $\mathcal{A}$, de uno en uno, vectores hasta completar a un conjunto generador del espacio que siga siendo linealmente independiente. Para garantizar la independencia lineal, partimos del subespacio $[\mathcal{A}]$, y el primer vector a agregar v se escoge fuera de $[\mathcal{A}]$ para garantizar que $\mathcal{A} \cup \{v\}$ es linealmente independiente. Se repite este procedimiento tantas veces como sea necesario hasta completar una base de V. $\square$

Demostración: Supongamos que $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ es un conjunto linealmente independiente. Si $\mathcal{A}$ genera a V, entonces $\mathcal{A}$ es base de V y no habría nada que demostrar (se toma $\mathcal{B} = \mathcal{A}$).

Ahora, trabajemos el caso en el cual $\mathcal{A}$ no genera a V, es decir, $[\mathcal{A}] \subsetneq V$. Entonces existe $v_{m+1} \in V$ tal que $v_{m+1} \notin [\mathcal{A}]$. Veamos que $\mathcal{A} \cup \{v_{m+1}\} = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ es linealmente independiente. Supongamos que tenemos una combinación lineal

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_m \cdot v_m + \alpha_{m+1} \cdot v_{m+1} = 0_V, \tag{5.7}$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \in \mathbb{K}$. Podemos notar que α_{m+1} tiene que valer 0. De lo contrario, si $\alpha_{m+1} \neq 0$, podemos despejar v_{m+1} de la combinación lineal anterior como

$$v_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} \cdot v_1 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} \cdot v_m \in [\mathcal{A}].$$

Lo anterior es una contradicción, pues estamos tomando v_{m+1} fuera del subespacio generado por $\mathcal{A}$. Por lo tanto, $\alpha_{m+1} = 0$, y la combinación lineal (5.7) pasa a ser

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_m \cdot v_m = 0_V.$$

Por otro lado, recordemos que $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto linealmente independiente, por lo cual $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Por lo tanto, todos los escalares presentes en la combinación lineal (5.7) son todos nulos, de donde concluimos que $\mathcal{A} \cup \{v_{m+1}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Si $V = [\mathcal{A} \cup \{v_{m+1}\}]$, tenemos que $\mathcal{A} \cup \{v_{m+1}\}$ es una base de V y la demostración concluye tomando $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{v_{m+1}\}$. De lo contrario, repetimos el procedimiento anterior tomando $v_{m+2} \notin [\mathcal{A} \cup \{v_{m+1}\}]$. Después de un número finito de repeticiones, encontraremos $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ linealmente independiente tal que $V = [\mathcal{B}]$. Este proceso se detiene cuando la cantidad de vectores de $\mathcal{B}$ (a saber, la cardinalidad de $\mathcal{A}$ más los vectores que hayamos agregado) alcance la dimensión de V. $\square$

Miremos algunos ejemplos de cómo aplicar los Teoremas 5.5 y 5.5.

Ejemplo 38.

1. A partir de $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ hallar una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   Lo primero a verificar es que $\mathcal{A}$ sea un conjunto linealmente independiente. Si

   $$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   entonces

   $$\begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior claramente implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Tenemos así que $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ linealmente independiente y de tres vectores. Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, solamente necesitamos agregar a $\mathcal{A}$ un vector para completar a una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Notamos que

$$[\mathcal{A}] = \left\{\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ / \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

es el subespacio vectorial formado por las matrices de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que tienen traza cero. Podemos entonces tomar $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin [\mathcal{A}]$, y obtener así la base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{A} \cup \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

2. Hallar una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$W = [(1,2,1), (0,3,1), (2,1,1)].$$

Tenemos claramente que W está generado por $\mathcal{A} = \{(1,2,1), (0,3,1), (2,1,1)\}$. Veamos ahora si $\mathcal{A}$ es linealmente independiente o dependiente. De ocurrir lo último, debemos elegir en $\mathcal{A}$ algún vector que sea combinación lineal del resto y descartarlo.

Supongamos entonces que

$$\alpha_1 \cdot (1,2,1) + \alpha_2 \cdot (0,3,1) + \alpha_3 \cdot (2,1,1) = (0,0,0).$$

Sabemos que lo anterior da lugar a un sistema de ecuaciones homogéneo que se resuelve escalerizando la matriz A obtenida a partir de colgar los vectores de $\mathcal{A}$ como columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{escalerización}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que el mencionado sistema es compatible indeterminado, cuyo conjunto de soluciones $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ viene dado por $\alpha_1 = -2\alpha_3$ y $\alpha_2 = \alpha_3$, donde $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Luego, tenemos que

$$-2\alpha_3 \cdot (1,2,1) + \alpha_3 \cdot (0,3,1) + \alpha_3 \cdot (2,1,1) = (0,0,0).$$

Haciendo $\alpha_3 = 1$, podemos hacer el despeje

$$(2,1,1) = 2 \cdot (1,2,1) + (-1) \cdot (0,3,1).$$

Descartando entonces de $\mathcal{A}$ el vector $(2,1,1)$, obtenemos $\mathcal{B} = \{(1,2,1), (0,3,1)\}$ tal que $[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}]$. Tenemos además que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente (verifíquelo). Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base de W.

Note que también se puede despejar $(1,2,1)$ o $(0,3,1)$ en función del resto de los vectores de $\mathcal{A}$, y por lo tanto $\{(0,3,1), (2,1,1)\}$ y $\{(1,2,1), (2,1,1)\}$ también son bases de W.

¿Si $W = [\mathcal{A}]$, se puede entonces descartar **cualquier** vector de $\mathcal{A}$ con el fin de hallar una base de W? Si bien esto funcionó en el ejemplo que acabamos de hacer, no siempre es el caso, como veremos en el siguiente ejemplo.

3. A partir de

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\},$$

hallar una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Procedemos de manera similar al ejemplo anterior. Supongamos que tenemos una combinación lineal

$$\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_3\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}+\alpha_4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_5\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

De esta igualdad se desprende el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Escalerizamos la matriz asociada:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{escalerización}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que $\alpha_1=\alpha_5=0$, $\alpha_2=-\alpha_4$ y $\alpha_3=\alpha_4$ con $\alpha_4\in\mathbb{R}$, de donde la combinación lineal planteada se convierte en:

$$-\alpha_4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}+\alpha_4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Haciendo $\alpha_4=1$, tenemos que

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

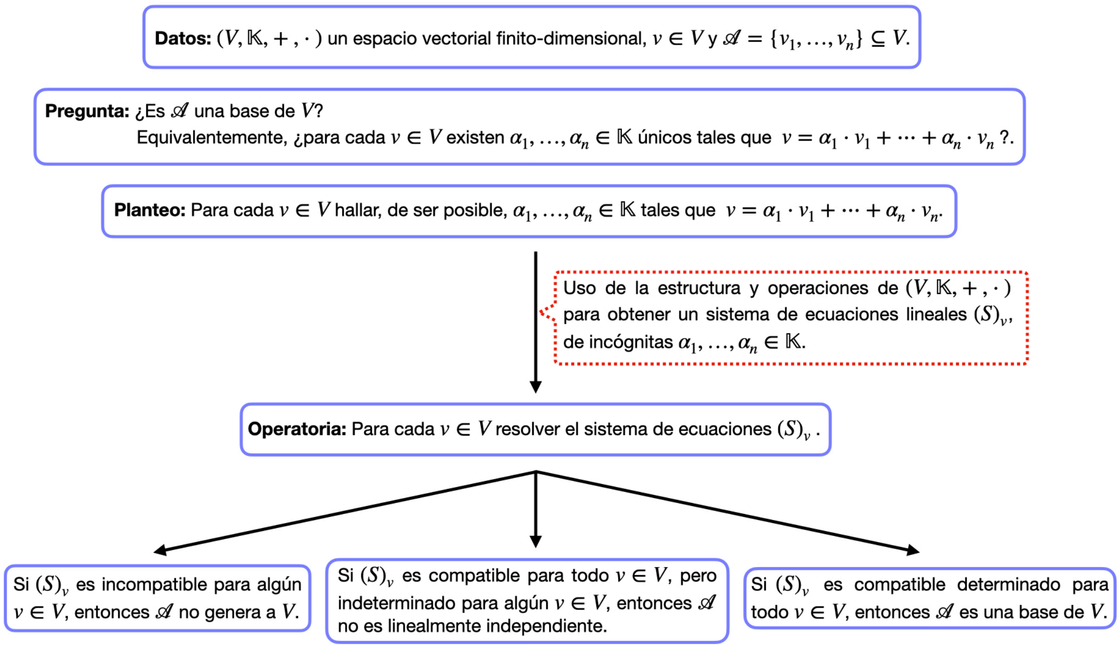
Descartando el segundo vector $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ de $\mathcal{A}$, obtenemos

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Note que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, por lo cual $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Note que no se pueden descartar de $\mathcal{A}$ los vectores $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, ya que estos no se pueden despejar (es decir, expresar como combinación lineal) en función del resto de los vectores en $\mathcal{A}$.

Cerramos esta sección dando un resumen de la parte operatoria a ejecutar a la hora de determinar si cierto conjunto dado de vectores es una base de un espacio vectorial.



5.6. Sumas directas

En álgebra, es común construir estructuras nuevas a partir de otras ya conocidas. Comencemos a explicar esto con un ejemplo concreto, a saber, la construcción de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{R}$. Sabemos que los elementos de $\mathbb{R}^2$ son pares ordenados (x, y), donde $x, y \in \mathbb{R}$. Tenemos así que $\mathbb{R}^2$ se construye "pegando" dos copias de $\mathbb{R}$. Más aún, a $\mathbb{R}^2$ se le puede dar estructura de espacio vectorial a partir del mismo tipo de estructura en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, si queremos sumar (x, y) y (x', y') en $\mathbb{R}^2$, hacemos la operación

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

donde $x + x'$ e $y + y'$ son justamente la suma en $\mathbb{R}$. La idea es que para operar en $\mathbb{R}^2$ con la suma anterior, todo se hace a nivel de cada coordenada una vez sabemos cómo operar en $\mathbb{R}$. Más aún, todo par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ podemos pensarlo como la siguiente suma:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y),$$

donde $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ y $(0, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{R}^2$ también puede interpretarse como el espacio formado por sumas de elementos en $\mathbb{R} \times \{0\}$ y en $\{0\} \times \mathbb{R}$, donde estos dos últimos conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^2$ que están en biyección con $\mathbb{R}$. Permitiendo cierta informalidad, podemos representar a $\mathbb{R}^2$ simbólicamente como $\mathbb{R} + \mathbb{R}$.

El propósito de esta sección es llevar la idea anterior de trabajar a nivel de coordenadas a la teoría de espacios y subespacios vectoriales. Esto se hará a través del concepto de suma directa.

Definición 5.10

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subseteq V$ dos subespacios de V. Se define la **suma** de W_1 y W_2 como el conjunto

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \ / \ w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2\}.$$

El conjunto $W_1 + W_2$ tiene además estructura de espacio vectorial. Para empezar, claramente es no vacío, ya que al ser 0_V un vector tanto en W_1 como en W_2 (pues ambos son subespacios de V), se tiene que $0_V = 0_V + 0_V$ pertenece a $W_1 + W_2$. Por otro lado, para sumar dos vectores $w_1 + w_2, w_1' + w_2' \in W_1 + W_2$, aprovechando las propiedades conmutativas y asociativas de la suma en V, tenemos que

$$(w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = (w_1 + w_1') + (w_2 + w_2'),$$

donde $w_1 + w_1' \in W_1$ y $w_2 + w_2' \in W_2$, ya que tanto W_1 como W_2 son subespacios de V. De manera similar, para $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que

$$\lambda \cdot (w_1 + w_2) = (\lambda w_1) + (\lambda w_2)$$

donde $\lambda w_1 \in W_1$ y $\lambda w_2 \in W_2$. Por lo tanto, las operaciones de suma y producto por escalares son cerradas en $W_1 + W_2$. Tenemos así el siguiente resultado.

Proposición 5.7

La suma $W_1 + W_2$ de los subespacios W_1 y W_2 es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo 39. Veamos algunos ejemplos de sumas de subespacios.

1. Como vimos en la motivación de esta sección, tenemos que

$$\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \times \{0\}) + (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

2. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Recordemos que una función $p \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ se dice **par** si

$$p(x) = p(-x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, las funciones 0, $|x|$, x^2 (o de manera más general, x^n con n par) y $\cos(x)$ son ejemplos de funciones pares. Por otro lado, una función $i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ se dice **impar** si

$$i(x) = -i(-x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como ejemplos de funciones impares, tenemos 0, x, x^3 (o de manera más general, x^n con n impar) y $\sin(x)$.

Hay que tener cierto cuidado con la terminología que acabamos de introducir. El significado de función par o impar no coincide con el concepto de número par o impar. Note por ejemplo que 0, como número, es par pero no impar; **sin embargo, como función, 0 es tanto par como impar**.

Toda $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ da lugar a una función par y a una impar. En efecto, si a partir de f construimos la función $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

tenemos que p es una función par (¡verifíquelo!). Similarmente, la función $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

es una función impar. Más aún, es claro que

$$f(x) = p(x) + i(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En otras palabras, toda función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ puede escribirse como suma de una función par más una función impar. Entonces, si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{I}$ denotan los subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ formados por todas las funciones pares e impares, respectivamente, entonces

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}.$$

No olvide demostrar que tanto $\mathcal{P}$ como $\mathcal{I}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

3. Considere el espacio vectorial $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, junto con los subespacios formados por las matrices simétricas y anti-simétricas:

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,/\, A = A^t\},$$
$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,/\, A = -A^t\}.$$

Entonces,

$$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}.$$

Para comprobar esto, se puede adaptar la idea del ejemplo anterior. A saber, primero notemos que toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ da lugar a una matriz simétrica y a una anti-simétrica, a saber,

$$\frac{A + A^t}{2} \text{ y } \frac{A - A^t}{2},$$

respectivamente. Como

$$A = \left(\frac{A + A^t}{2}\right) + \left(\frac{A - A^t}{2}\right),$$

se tiene entonces que $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$.

Observación 5.8

Con los ejemplos que hemos visto anteriormente, vale la pena preguntarse si la construcción $W_1 + W_2$ es una buena generalización de la interpretación de $\mathbb{R}^2$ comentada al principio de esta sección. La respuesta es **no**. El plano $\mathbb{R}^2$ tiene una propiedad de unicidad sobre sus elementos que $W_1 + W_2$ no necesariamente tiene. A saber, todo elemento (x, y) de $\mathbb{R}^2$ está unívocamente determinado por el valor de sus coordenadas. Sin embargo, puede darse el caso en donde un mismo vector v de $W_1 + W_2$ pueda representarse de dos maneras distintas, es decir $w_1 + w_2 = v = w_1' + w_2'$, donde $w_1, w_1' \in W_1$, $w_2, w_2' \in W_2$, y $w_1 \neq w_1'$ o $w_2 \neq w_2'$. Veamos a continuación un ejemplo de esto último.

Ejemplo 40. Considere $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con los siguientes subconjuntos:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} \,/\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ y } W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix} \,/\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

A modo de ejercicio, demuestre que W_1 y W_2 son subespacios de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Veamos que

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = W_1 + W_2.$$

Podemos escribir cada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -a-c \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & a+b+c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\begin{pmatrix} a+c & -a-c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in W_1$ y $\begin{pmatrix} -c & a+b+c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in W_2$. Posteriormente, veremos en el Ejemplo 41 una forma más corta de notar que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$.

La suma $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$ no es directa. Considere por ejemplo la matriz identidad $I_{2\times 2}$. Podemos notar que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Existe un tipo de suma de subespacios $W_1 + W_2$ para el cual si es posible escribir cada $v \in W_1 + W_2$ de forma única como $v = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Lo definimos a continuación.

Definición 5.11

Dados dos subespacios W_1 y W_2 de un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, si para todo $v \in W_1 + W_2$ existen $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ únicos tales que $v = w_1 + w_2$, entonces diremos que la suma $W_1 + W_2$ es una **suma directa**, y la denotaremos por

$$W_1 \oplus W_2.$$

Verificar la condición de la definición anterior para probar si una suma de subespacios es directa o no, puede resultar poco práctico. Afortunadamente, existe el siguiente criterio para establecer cuándo una suma de subespacios es directa o no.

Proposición 5.8

Sean W_1 y W_2 dos subespacios de un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Entonces, la suma $W_1 + W_2$ es directa si, y sólo si, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

Demostración: Supongamos primero que la suma $W_1 + W_2$ es directa, y consideremos $w \in W_1 \cap W_2$. Notamos que $w \in W_1 + W_2$. En efecto, como $w \in W_1$, podemos representarlo como vector en $W_1 + W_2$ al hacer

$$w = w + 0_V,$$

ya que $0_V \in W_2$. Pero por otro lado, $w = 0_V + w$ con $0_V \in W_1$ y $w \in W_2$. Entonces, para w tenemos dos representaciones como vector en $W_1 + W_2$. Como $W_1 + W_2$ es una suma directa, se trata de la misma representación. Por lo tanto, $w = 0_V$.

Ahora supongamos que $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ y que $v \in W_1 + W_2$ posee dos representaciones de la forma $v = w_1 + w_2$ y $v = w_1' + w_2'$ donde $w_1, w_1' \in W_1$ y $w_2, w_2' \in W_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= w_1' + w_2' \\ w_1 - w_1' &= w_2' - w_2. \end{aligned}$$

Por un lado, $w_1 - w_1' \in W_1$ ya que W_1 es un subespacio vectorial. De manera análoga, $w_2' - w_2 \in W_2$. Como $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$, tenemos que $w_1 - w_1' \in W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Entonces, $w_1 - w_1' = 0_V$. De esto se sigue que $w_1 = w_1'$ y $w_2 = w_2'$. Por lo tanto, la representación $v = w_1 + w_2$ de v como vector en $W_1 + W_2$ es única. □

Pasemos ahora al cálculo de la dimensión de $W_1 + W_2$ para el caso en el cual W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial finito-dimensional $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.

Teorema 5.4: un teorema de las dimensiones

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial finito-dimensional y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Entonces,

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}}(W_1) + \dim_{\mathbb{K}}(W_2) - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Idea de la demostración: Para demostrar la igualdad enunciada, la idea es construir una base de $W_1 + W_2$ convenientemente y contar sus elementos. Específicamente, a partir de una base de $W_1 \cap W_2$, se obtienen pases de W_1 y de W_2 por extensión. La unión de estas dos bases será una base de $W_1 + W_2$. □

Demostración: Sea

$$\mathcal{B}_{12} = \{w_1, \dots, w_m\}$$

una base de $W_1 \cap W_2$, de donde $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2) = m$. Como $\mathcal{B}_{12}$ es un subconjunto linealmente independiente de W_1, existe una base

$$\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_k\}$$

de W_1 que contiene a $\mathcal{B}_{12}$, donde $\dim_{\mathbb{K}}(W_1) = m + k$. De manera similar, existe una base

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_l\}$$

de W_2 que contiene a $\mathcal{B}_{12}$, donde $\dim_{\mathbb{K}}(W_2) = m + l$. Veamos que

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\}$$

es una base de $W_1 + W_2$. Note que después de demostrar esto, la igualdad en el enunciado será una consecuencia inmediata.

- $\mathcal{B}$ es linealmente independiente: Supongamos que tenemos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k$, $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{K}$ tales que

  $$\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_m \cdot w_m + \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_k \cdot u_k + \gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_l \cdot v_l = 0_V. \tag{5.8}$$

  Luego,

  $$\gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_l \cdot v_l = -\alpha_1 \cdot w_1 - \cdots - \alpha_m \cdot w_m - \beta_1 \cdot u_1 - \cdots - \beta_k \cdot u_k.$$

  Por un lado, $\gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_l \cdot v_l \in W_2$. Por otro lado, $-\alpha_1 \cdot w_1 - \cdots - \alpha_m \cdot w_m - \beta_1 \cdot u_1 - \cdots - \beta_k \cdot u_k \in W_1$. Por lo tanto,

  $$\gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_l \cdot v_l \in W_1 \cap W_2.$$

  Luego, existen $\delta_1, \dots, \delta_m \in \mathbb{K}$ tales que

  $$\gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_l \cdot v_l = \delta_1 \cdot w_1 + \cdots + \delta_m \cdot w_m,$$

  es decir,

  $$\delta_1 \cdot w_1 + \cdots + \delta_m \cdot w_m + (-\gamma_1) \cdot v_1 + \cdots + (-\gamma_l) \cdot v_l = 0_V.$$

Como $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_l\}$ es linealmente independiente, tenemos que

$$\delta_1 = \cdots = \delta_m = \gamma_1 = \cdots = \gamma_l = 0.$$

Entonces, la combinación lineal (5.8) pasa a ser:

$$\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_m \cdot w_m + \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_k \cdot u_k = 0_V.$$

Ahora, recuerde que $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_k\}$ es linealmente independiente. De esto se sigue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$. Por lo tanto, todos los escalares en la combinación lineal (5.8) son cero, por lo cual $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es linealmente independiente.

- $\mathcal{B}$ genera a $W_1 + W_2$: Sea $v = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$, es decir, $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Como $\mathcal{B}_1$ es base de W_1, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+k} \in \mathbb{K}$ tal que

$$w_1 = \alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_m \cdot w_m + \alpha_{m+1} \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{m+k} \cdot u_k.$$

De manera similar, existen $\beta_1, \dots, \beta_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{m+l} \in \mathbb{K}$ tales que

$$w_2 = \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_m \cdot w_m + \beta_{m+1} \cdot v_1 + \cdots + \beta_{m+l} \cdot v_l.$$

Luego,

$$v = w_1 + w_2 = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot w_1 + \cdots + (\alpha_m + \beta_m) \cdot w_m + \alpha_{m+1} \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{m+k} \cdot u_k + \beta_{m+1} \cdot v_1 + \cdots + \beta_{m+l} \cdot v_l.$$

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ genera a $W_1 + W_2$.

□

Ejemplo 41. Volviendo al Ejemplo 40, calculemos la dimensión de $W_1 + W_2$ obviando el hecho de que conocemos que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$. Por el teorema anterior, necesitamos conocer las dimensiones de W_1, W_2 y $W_1 \cap W_2$. Por un lado, podemos notar que

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \text{ y } W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

donde $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ son bases de W_1 y W_2, respectivamente. Por otro lado,

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & b \end{pmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

donde $\mathcal{B}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $W_1 \cap W_2$. Por lo tanto,

$$\dim_{\mathbb{R}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{R}}(W_1) + \dim_{\mathbb{R}}(W_2) + \dim_{\mathbb{R}}(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Tenemos así que $W_1 + W_2$ es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimensión 4. Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, concluimos que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$.

Escrito en LaTeX por:
Marco A. Pérez, Ph.D.
Profesor Adjunto Grado 3
Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Ing. Rafael Laguardia"
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
Oficina 122
mperez@fing.edu.uy