RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

El objetivo de éste y el siguiente capítulo es el estudio de aspectos algebraicos y geométricos del conjunto $\mathbb{R}^n$.

Recordemos que

$\mathbb{R}^n$ = conjunto de n-uplas.

Una n-upla es un arreglo ordenado de n números reales

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde $x_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Las n-uplas también son conocidas como vectores, sobre todo cuando se abordan desde un enfoque geométrico.

Propiedades y operaciones en $\mathbb{R}^n$

· Igualdad: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

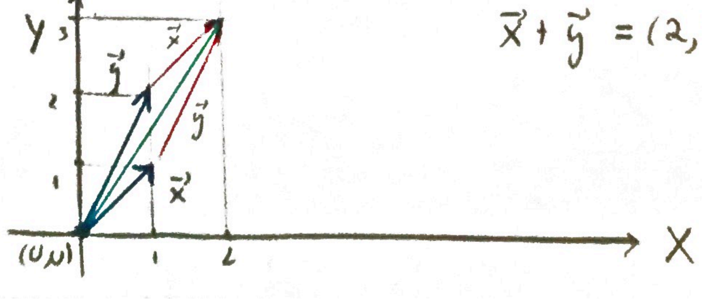
$\vec{x} = \vec{y}$ si y sólo si $x_k = y_k$ $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

· Suma: $\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$

Antes de ver las propiedades de la suma, veamos qué interpretación geométrica tiene para $n = 2$ y 3.

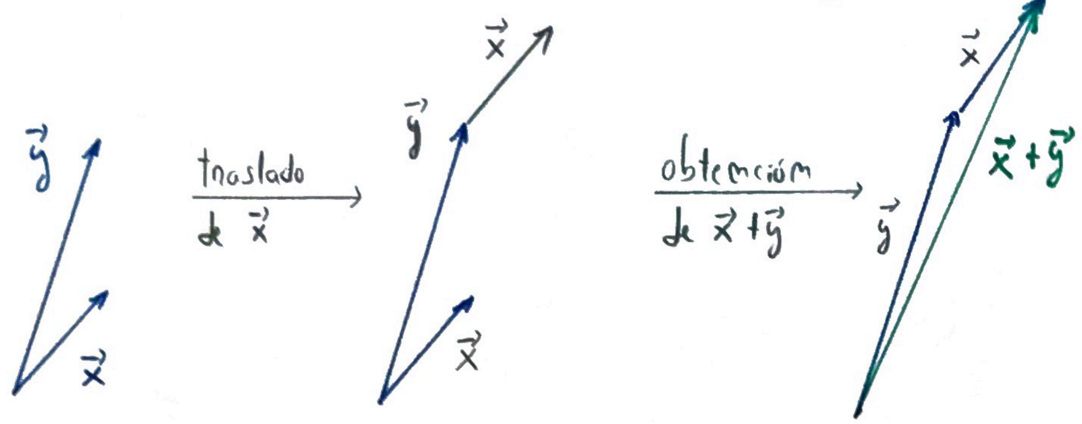
Ejemplo: $\vec{x} = (1,1)$, $\vec{y} = (1,2)$ Hallar $\vec{x} + \vec{y}$ y representar geométricamente.

$\vec{x} + \vec{y} = (2,3)$



Podemos notar lo siguiente: para obtener $\vec{x}+\vec{y}$, formamos el paralelogramo con lados $\vec{x}$ e $\vec{y}$, y entonces el vector $\vec{x}+\vec{y}$ es la diagonal que contiene al origen.

Otra manera de visualizar $\vec{x}+\vec{y}$ es la siguiente:



- La observación anterior también vale para suma de vectores en $\mathbb{R}^3$.

<u>Propiedades de la suma</u>:

(1) Conmutatividad: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$, $\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$.

- <u>Demostración</u>: $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y} &= (x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)\\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)\\ &= (y_1+x_1, y_2+x_2,\dots,y_n+x_n),\end{aligned}$$

porque la suma en $\mathbb{R}$ es conmutativa. ∎

(2) Asociatividad: $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$, $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^n$.

(3) Existencia del elemento neutro:

$\vec{0}=(0,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$.

$\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$, $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

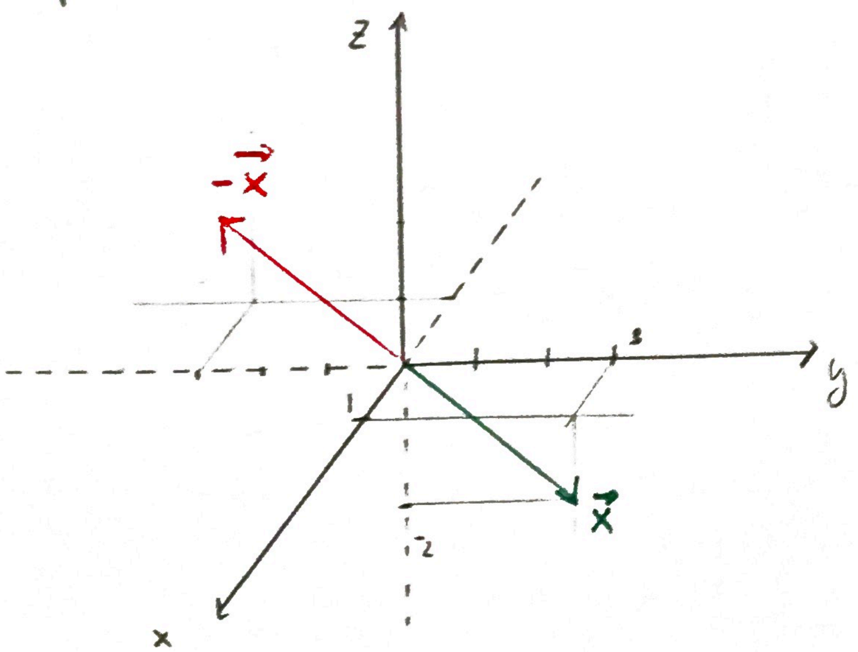
- $\vec{0}$ es el único vector que satisface la propiedad anterior. En efecto, supongamos que existe $\vec{0}'$ tal que $\vec{x}+\vec{0}'=\vec{x}$, para todo $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

Luego, por un lado tenemos que $\vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}'$.
Por otro lado, $\vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}$. Como la suma en $\mathbb{R}^n$ es conmutativa, nos queda $\vec{0} = \vec{0}'$. ■

(4) Existencia del elemento opuesto:
Para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, existe $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.
Tal $\vec{y}$ es único, y se denota por $\vec{y} = -\vec{x}$.

- Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$, y cada componente es resultado de la propiedad del elemento opuesto en $\mathbb{R}$.

Ejemplo: Si $\vec{x} = (1, 3, -2) \in \mathbb{R}^3$, entonces $-\vec{x} = (-1, -3, 2)$.
Note que, si pensamos en $\vec{x} = (1, 3, -2)$ como una flecha con extremo inicial $(0,0,0)$ y extremo final $(1, 3, -2)$, entonces, $-\vec{x}$ es la flecha que tiene "el mismo tamaño" que $\vec{x}$, que parte del origen, paralela a $\vec{x}$, pero apuntando en sentido opuesto. Más tarde definiremos formalmente a qué nos referimos con "tamaño".



- <u>Multiplicación de un vector por un escalar:</u>

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

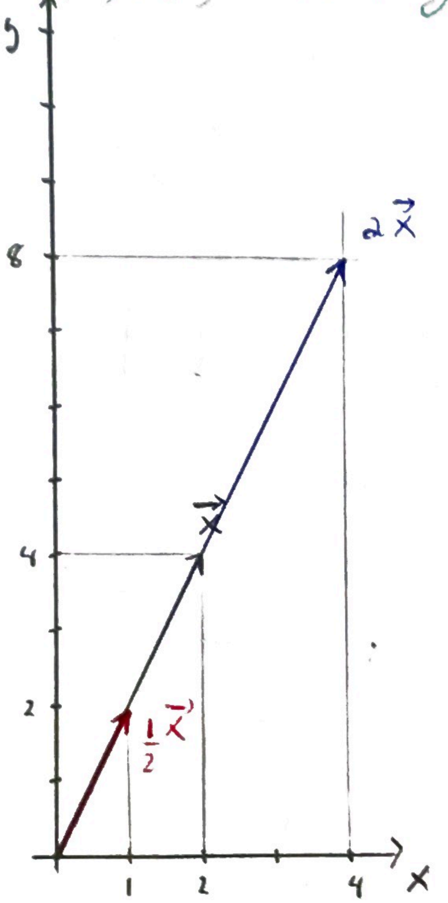
Se define $\alpha \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ como el vector

$$\alpha \cdot \vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

- <u>Ejemplo</u>: Dado $\vec{x} = (2,4)$, hallar y dibujar $\alpha \vec{x}$ para $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 2$.

$\frac{1}{2} \vec{x} = (1,2)$

$2 \vec{x} = (4,8)$



- Geométricamente, la operación $\alpha \vec{x}$, para $\alpha > 0$, estira o contrae el vector $\vec{x}$ si $\alpha > 1$ o si $\alpha < 1$, respectivamente.

↳ Si $\alpha < 0$, se estira o contrae $\vec{x}$ según $|\alpha|$, y se cambia el sentido ($\alpha \vec{x}$ apunta en sentido opuesto al de $\vec{x}$).

Propiedades:

1) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (asociatividad)

2) $1\,\vec{x} = \vec{x}$ (elemento neutro del producto por un escalar)

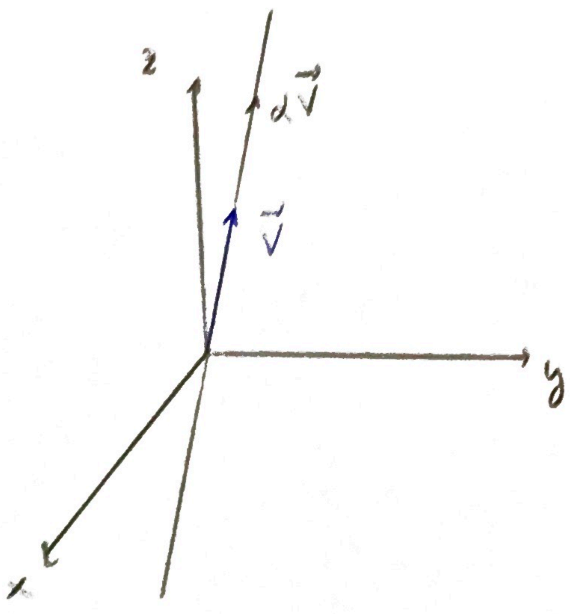
3) $\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (distributividad)
$(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Rectas en el plano y en el espacio

Trabajaremos en $\mathbb{R}^n$ con $n=2$ y $n=3$.

- La recta en $\mathbb{R}^3$ de dirección $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \neq \vec{0}$ y que pasa por el origen $(0,0,0)$ es el conjunto de puntos de la forma

$$(x, y, z) = \alpha(x_1, y_1, z_1) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

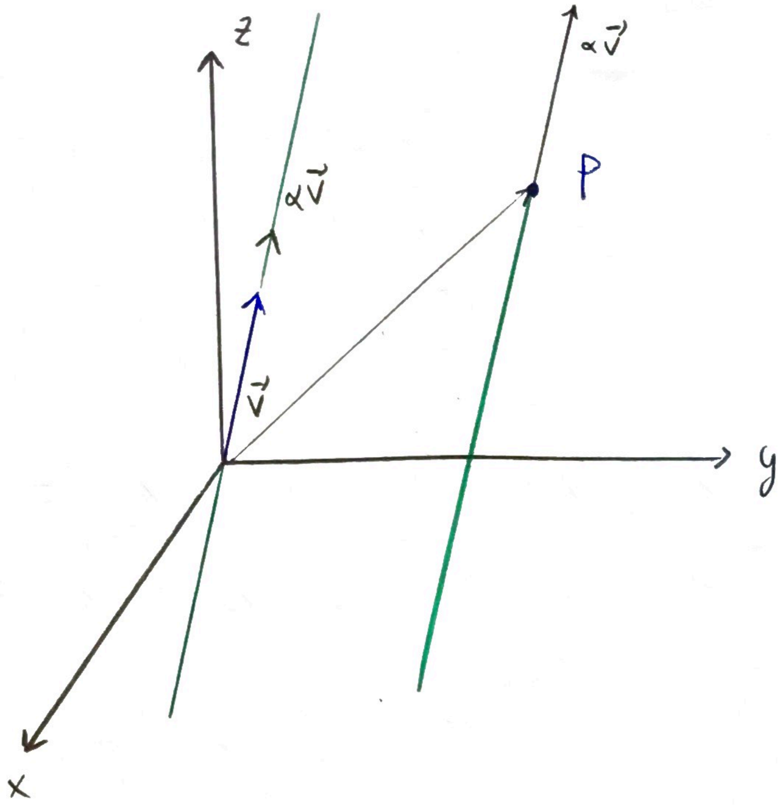


- Si la recta no pasa por el origen y lo hace por otro punto, digamos $P = (x_0, y_0, z_0)$, entonces trasladamos la igualdad anterior.

Es decir,

$$(x, y, z) = \alpha(x_1, y_1, z_1) + (x_0, y_0, z_0)$$

define la recta de dirección $\vec{v}$ que pasa por el punto P.



Observación:

1) Para construir una recta basta con tener una dirección y un punto por donde pasa. Se entiende por "dirección" a cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ diferente de cero.

Ejemplo: Halle la recta en el plano $\mathbb{R}^2$ de dirección $\vec{v} = (1,2)$ y que pasa por el punto $(3,4)$.

$$(x,y) = \alpha(1,2) + (3,4) \quad (*)$$

Pero hagamos algo más:

$$(x,y) = (\alpha, 2\alpha) + (3,4)$$

$$(x,y) = (\alpha+3, 2\alpha+4)$$

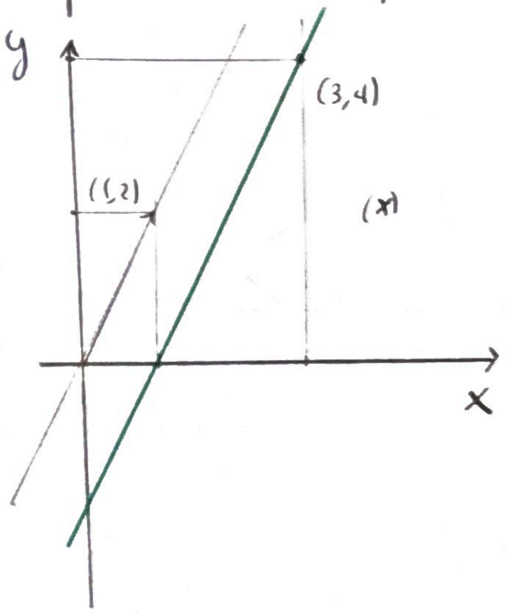
Luego, $\begin{cases} x = \alpha + 3 \\ y = 2\alpha + 4. \end{cases}$

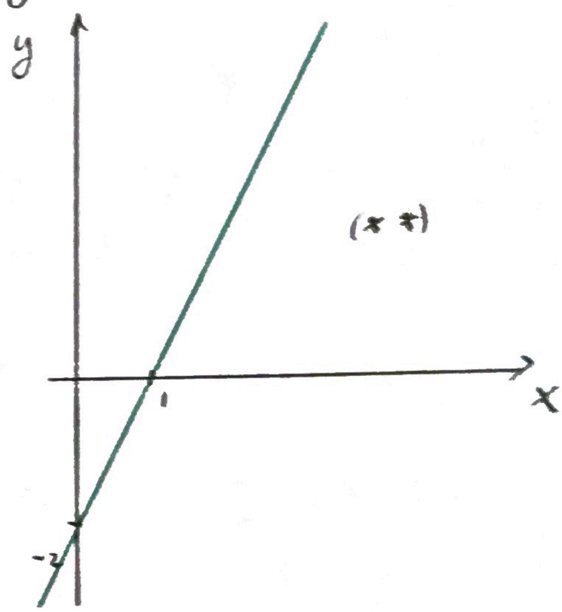
Podemos despejar α: $\alpha = x - 3$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$y = 2(x-3) + 4$$
$$y = 2x - 6 + 4$$
$$y = 2x - 2 \quad (**)$$

Dibujemos las expresiones $(*)$ y $(**)$





- Se obtiene la misma gráfica.
- Esto se debe a que $(*)$ y $(**)$ son descripciones algebraicas distintas del mismo objeto geométrico

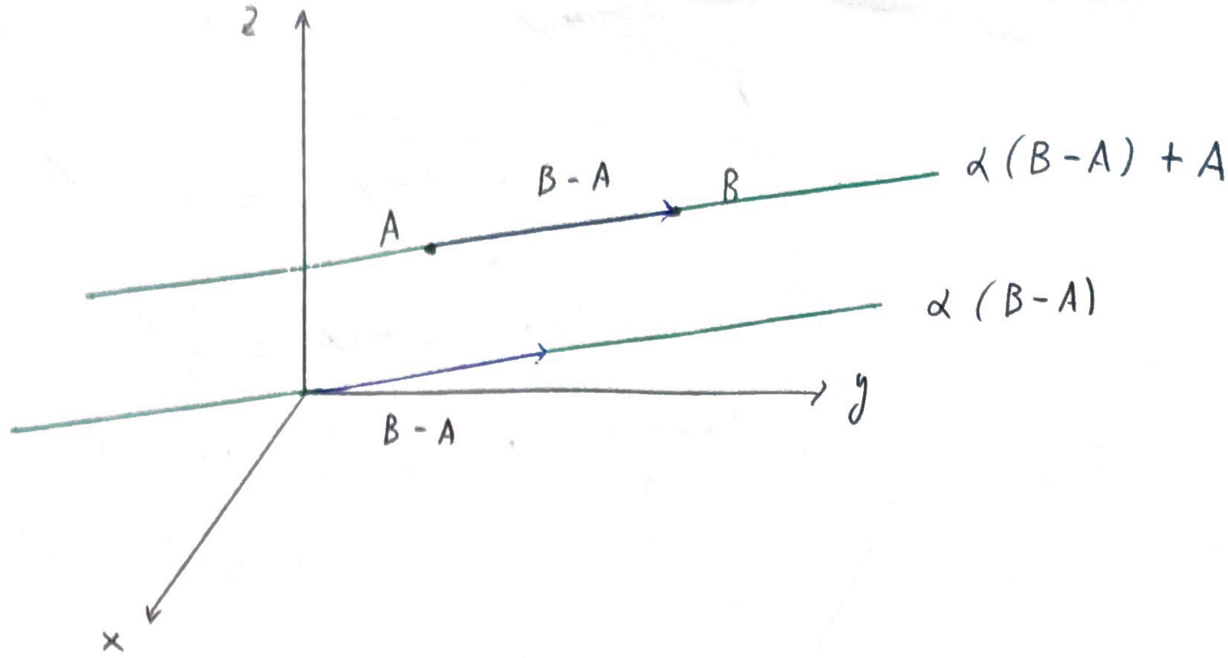
Observación:

2) Para describir una recta, también basta únicamente con conocer dos puntos por donde pasa.

Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ dos puntos diferentes en $\mathbb{R}^3$. A la (única) recta que pasa por A y B podemos darle dirección $B - A$. Luego, los puntos que pertenecen a esa recta vienen dados por

$$(x, y, z) = \alpha(B - A) + A, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(ecuación vectorial o paramétrica)



$$(x,y,z)=\alpha(B-A)+A$$

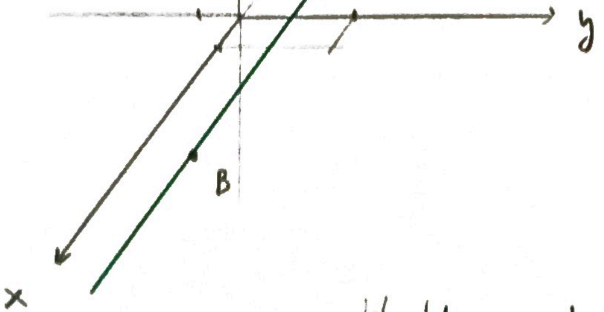
$$(x,y,z)=\alpha(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)+(a_1,a_2,a_3)$$

$$(x,y,z)=(\alpha(b_1-a_1)+a_1,\ \alpha(b_2-a_2)+a_2,\ \alpha(b_3-a_3)+a_3)$$

$$\begin{cases} x=\alpha(b_1-a_1)+a_1 \\ y=\alpha(b_2-a_2)+a_2 \\ z=\alpha(b_3-a_3)+a_3 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A y B.

<u>Ejemplo</u>: Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $A=(1,3,2)$ y $B=(0,-1,-4)$.



$B-A=(-1,-4,-6)$ (dirección)

$$(x,y,z)=\alpha(-1,-4,-6)+(1,3,2)$$

$$(x,y,z)=(1-\alpha,\ 3-4\alpha,\ 2-6\alpha)$$

$$\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=3-4\alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R} \\ z=2-6\alpha \end{cases}$$

- Hablar de sist. compatible.
- Verificar si $(-1,-3,-10)$ y $(4,10,24)$ están en la recta.

Hágamos algo más (despejan α).

$$-\alpha = x - 1$$

$$\alpha = 1 - x.$$

Pero también:

$$-4\alpha = y - 3 \qquad y \qquad -6\alpha = z - 2$$

$$\alpha = \frac{3-y}{4} \qquad\qquad \alpha = \frac{2-z}{6}$$

Tenemos entonces

$$1 - x = \frac{3-y}{4} = \frac{2-z}{6}$$

o

$$x - 1 = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{6}.$$

Esta igualdad doble es otra descripción de la recta que pasa por $(1,3,2)$ y $(0,-1,-4)$, conocida como ecuación implícita.

De manera más general,

$$\alpha = \frac{x-a_1}{b_1-a_1} \quad \text{si } a_1 \neq b_1$$

$$\alpha = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} \quad \text{si } a_2 \neq b_2$$

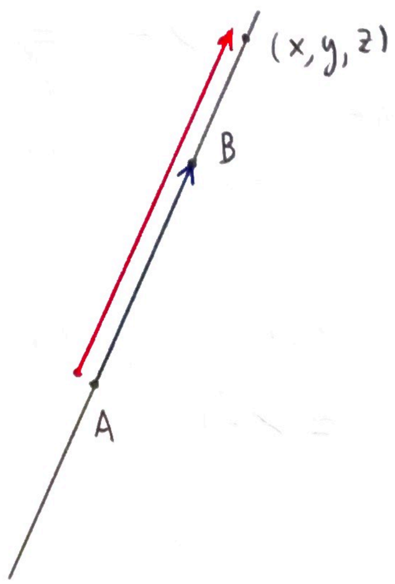
$$\alpha = \frac{z-a_3}{b_3-a_3} \quad \text{si } a_3 \neq b_3$$

y se obtiene

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{z-a_3}{b_3-a_3} \quad \text{si } b_1 \neq a_1,\ b_2 \neq a_2 \text{ y } b_3 \neq a_3$$

(ecuación implícita de la recta que pasa por A y B)

La ecuación implícita describe todos los puntos (x, y, z) tales que $(x, y, z) - A$ es paralelo a $B - A$.



$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}$$

En otras palabras, las componentes de $(x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)$ y $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ son proporcionales.

Ejemplo: ¿Qué pasa cuando $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ o $b_3 = a_3$?

$A = (2, -1, 2)$

$B = (4, 1, 2)$

$B - A = (2, 2, 0)$

$(x, y, z) = \alpha(2, 2, 0) + (2, -1, 2)$

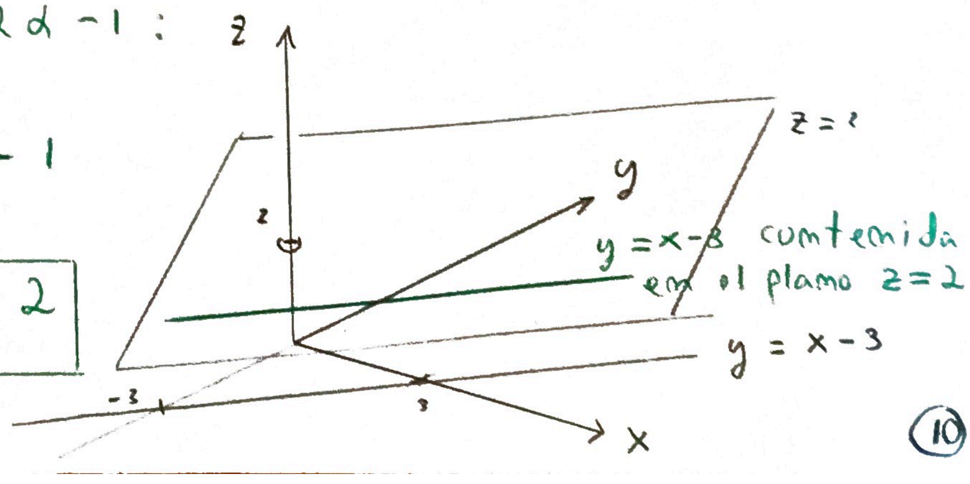
$(x, y, z) = (2\alpha + 2, 2\alpha - 1, 2)$

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 2 \\ y = 2\alpha - 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{2}, \quad z = 2$$

Para visualizar esta recta en $\mathbb{R}^3$, sustituimos $\alpha = \frac{x - 2}{2}$ en $y = 2\alpha - 1$:

$$y = 2 \cdot \frac{(x - 2)}{2} - 1$$

$$\boxed{y = x - 3, \quad z = 2}$$

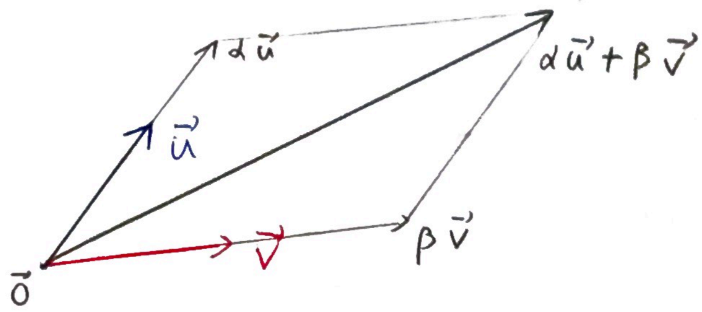


PLANOS EN EL ESPACIO

Así como para obtener una recta se necesita un vector de dirección, para generar un plano necesitamos dos direcciones no paralelos.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores no nulos y no paralelos en $\mathbb{R}^3$. El plano generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que pasa por el origen es el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la forma

$$(x, y, z) = \alpha (u_1, u_2, u_3) + \beta (v_1, v_2, v_3), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$



Si el plano no pasa por el origen, pero sí por un punto P, entonces trasladamos la ecuación anterior.

$P = (x_0, y_0, z_0)$

$$(x, y, z) = \alpha (u_1, u_2, u_3) + \beta (v_1, v_2, v_3) + (x_0, y_0, z_0)$$

(ecuación vectorial o paramétrica)

- Otra forma de determinar un plano es conociendo tres puntos por donde pasa.

Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ tres puntos en $\mathbb{R}^3$ que no están sobre la misma recta. Podemos construir dos direcciones haciendo

$$\vec{u} = B - A \quad y \quad \vec{v} = C - A.$$

Entonces, la ecuación del plano que pasa por A, B y C está dada por:

$$(x, y, z) = \alpha (B - A) + \beta (C - A) + A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$
$$C - A = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$$

$$(x, y, z) = \alpha (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$
$$+ \beta (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) + (a_1, a_2, a_3)$$

$$\begin{cases} x = \alpha (b_1 - a_1) + \beta (c_1 - a_1) + a_1 \\ y = \alpha (b_2 - a_2) + \beta (c_2 - a_2) + a_2 \\ z = \alpha (b_3 - a_3) + \beta (c_3 - a_3) + a_3 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas.

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 3, 2)$ y $C = (-1, 0, -3)$.

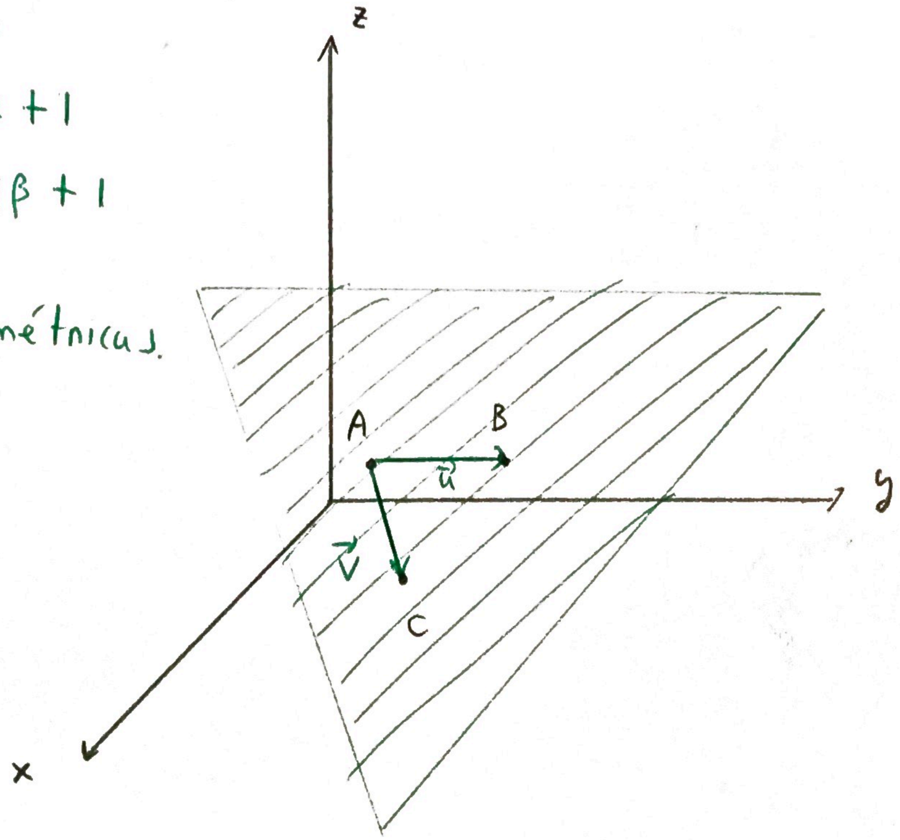
$$\vec{u} = B - A = (0, 2, 1)$$
$$\vec{v} = C - A = (-2, -1, -4)$$

$$(x, y, z) = \alpha (0, 2, 1) + \beta (-2, -1, -4) + (1, 1, 1)$$

$$(x, y, z) = (-2\beta + 1, 2\alpha - \beta + 1, \alpha - 4\beta + 1)$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = 2\alpha - \beta + 1 \\ z = \alpha - 4\beta + 1 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas.



Observación: Es importante que los vectores de dirección del plano sean colineales en el sentido de la sig. definición

Definición: Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ son <u>colineales</u> (o paralelos) si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad o \quad \vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

- $\vec{0}$ es colineal con cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$$

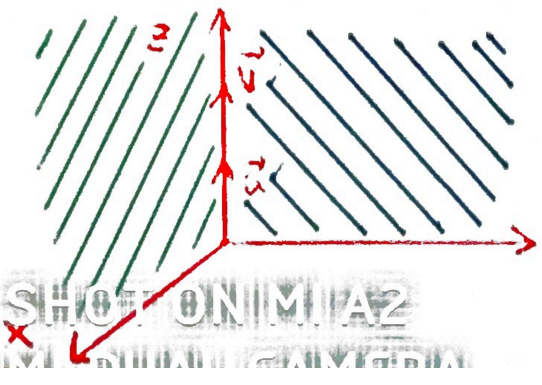
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales y no nulos, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

$$\left(o \ \vec{v} = \frac{1}{\lambda} \vec{u}\right)$$

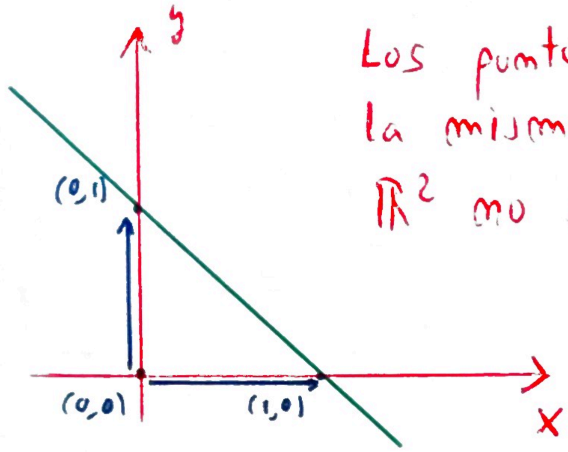
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos y colineales, no se puede definir un plano con direcciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Por ejemplo, ¿si $\vec{u} = (0,0,1)$ y $\vec{v} = (0,0,2)$, se puede hallar el plano de direcciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que pasa por el origen?



Tanto el plano XZ como el plano YZ contienen a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasan por el origen.

• El concepto de vectores colineales no necesariamente coincide con el de puntos alineados.



Los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$ están sobre la misma recta, pero como vectores de $\mathbb{R}^2$ no son colineales.

Ecuación reducida del plano:

$$ax + by + cz = d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación anterior definen un plano en $\mathbb{R}^3$.

· Haciendo $y = z = 0$, se tiene $x = \frac{d}{a}$ (si $a \neq 0$).

· Haciendo $x = z = 0$, se tiene $y = \frac{d}{b}$ (si $b \neq 0$).

· Haciendo $x = y = 0$, se tiene $z = \frac{d}{c}$ (si $c \neq 0$)

La ecuación anterior, para $a, b, c \neq 0$, representa el plano que pasa por los puntos

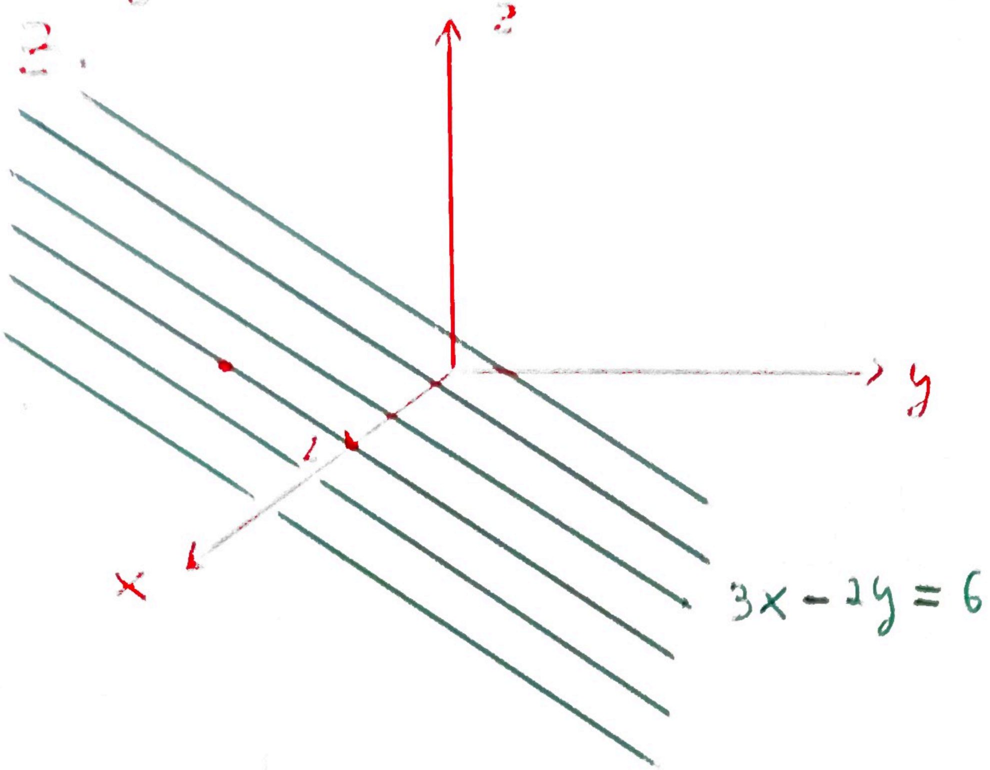
$$(d/a, 0, 0), \quad (0, d/b, 0) \text{ y } (0, 0, d/c).$$

Ejemplo: $3x - 2y + z = 6$ es el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(2,0,0)$, $(0,-3,0)$ y $(0,0,6)$.

Observación: ¿Qué pasa si $a = 0$, ó $b = 0$ ó $c = 0$?

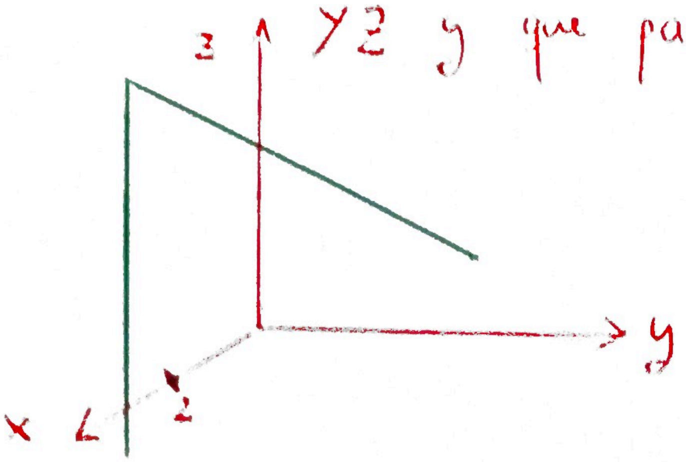
- Por ejemplo $3x - 2y = 6$ $(c = 0)$

  En este caso, $z \in \mathbb{R}$, y el plano representado por $3x - 2y = 6$ es aquél que pasa por la recta $3x - 2y = 6$ en el plano XY y paralelo al eje z.



- $3x = 6$ $(b = c = 0)$

  $x = 2$. Tenemos el plano paralelo al plano YZ y que pasa por $(2,0,0)$



• Si $d = 0$ tenemos un plano que pasa por el origen.

Ejemplo: ¿Cómo obtener la ecuación reducida a partir de las paramétricas?

$$\begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = 2\alpha - \beta + 1 \\ z = \alpha - 4\beta + 1 \end{cases}$$

La idea es despejar α y β, o equivalentemente, resolver el sistema

$$\begin{cases} 2\beta = 1 - x \\ 2\alpha - \beta = y - 1 \\ \alpha - 4\beta = z - 1 \end{cases}$$

El sistema debe ser compatible.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1-x \\ 2 & -1 & y-1 \\ 1 & -4 & z-1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & (1-x)/2 \\ 0 & 7 & y-2z+1 \\ 1 & -4 & z-1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & (1-x)/2 \\ 0 & 0 & y-2z+1-\frac{7}{2}(1-x) \\ 1 & 0 & z-1+2(1-x) \end{array}\right)$$

$$y - 2z + 1 - \frac{7}{2}(1-x) = 0 \qquad \beta = \frac{1-x}{2}$$

$$2y - 4z + 2 - 7 + 7x = 0. \qquad \alpha = z - 2x + 1$$

$$7x + 2y - 4z = 5 \rightarrow \text{Ec. reducida.}$$

Ejemplo: ¿Cómo pasar de la ecuación reducida a las ecuaciones paramétricas?

$$3x - 2y + z = 6$$

Este plano pasa por los puntos $(2,0,0)$, $(0,-3,0)$ y $(0,0,6)$. Podemos entonces construir las direcciones $\vec{u} = (0,-3,0) - (2,0,0) = (-2,-3,0)$

$$\vec{v} = (0,0,6) - (2,0,0) = (-2,0,6)$$

$$(x,y,z) = \alpha(-2,-3,0) + \beta(-2,0,6) + (2,0,0)$$

$$(x,y,z) = (-2\alpha - 2\beta + 2, -3\alpha, 6\beta)$$

$$\begin{cases} x = -2\alpha - 2\beta + 2 \\ y = -3\alpha \\ z = 6\beta \end{cases}$$

Pasar de la ecuación vectorial a la implícita de un plano:

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores no nulos y no colineales y $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en $\mathbb{R}^3$.

$$\pi: (x,y,z) = \lambda u + \mu v + P$$

$$(x,y,z) = \lambda (u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3) + (x_0, y_0, z_0)$$

$$(x,y,z) = (\lambda u_1 + \mu v_1 + x_0,\ \lambda u_2 + \mu v_2 + y_0,\ \lambda u_3 + \mu v_3 + z_0)$$

$$(S): \begin{cases} x - x_0 = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y - y_0 = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z - z_0 = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad (\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$(x,y,z) \in \pi$ sii (S) es compatible.

$$(A|b) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x - x_0 \\ u_2 & v_2 & y - y_0 \\ u_3 & v_3 & z - z_0 \end{pmatrix}$$

Debe ocurrir que $rg(A) = rg(A|b)$

Por otro lado, $Rg(A) = 2$ ya que u y v son LI (esto se tratará más adelante). Luego, $Rg(A|b) = 2 < 3$ de donde $(A|b)$ <u>no</u> es invertible.

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$(x, y, z) \in \pi \quad \text{sii} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

- El cálculo de este determinante da lugar a la ecuación implícita o reducida de π.

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - x_0)(u_2 v_3 - u_3 v_2) - (y - y_0)(u_1 v_3 - u_3 v_1) + (z - z_0)(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$

$$\overbrace{(u_2 v_3 - u_3 v_2)}^{A} x + \overbrace{(u_3 v_1 - u_1 v_3)}^{B} y + \overbrace{(u_1 v_2 - u_2 v_1)}^{C} z$$

$$+ \overbrace{(x_0 u_3 v_2 - u_2 v_3 x_0 + y_0 u_1 v_3 - y_0 u_3 v_1 + z_0 u_2 v_1 - z_0 u_1 v_2)}^{D} = 0$$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

¿Cómo pasan de la ecuación implícita a las ecuaciones paramétricas?

Sea π el plano de $\mathbb{R}^3$ con ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Para hallar las ecuaciones paramétricas, basta con encontrar tres puntos en el plano no alineados.

Un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a π si

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Problemas de intersección

1.) $r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = -3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$\pi: x - 3y + 2z = -7$

$1+2t-3(2-t)+2(-3t) = -7$

$1+2t-6+3t-6t = -7$

$-t = -7-1+6 = -2$

$t = 2$

Pto. de intersección: $(5, 0, -6)$.

2.)

$r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 2+\mu \\ y = \mu \\ z = 1+4\mu \end{cases}$

$\begin{cases} 1+2\lambda = 2+\mu \\ 2-\lambda = \mu \\ 3+2\lambda = 1+4\mu \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -6 \end{array}\right)$

$\begin{cases} 2\lambda - \mu = 1 \\ -\lambda - \mu = -2 \\ 2\lambda - 4\mu = -2 \end{cases}$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Pto. de intersección: $(3, 1, 5)$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{matrix}$

3.) $\pi_1 : x + 2y - 5z - 4 = 0$

$\pi_2 : 3x + 7y - 2z - 15 = 0$

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ 3x + 7y - 2z = 15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ 0 + y + 13z = 3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x + 0 - 31z = -2 \\ y + 13z = 3 \end{cases}$$

$x = 31z - 2$

$y = 3 - 13z$

$(x, y, z) \in \pi_1 \cap \pi_2$ sii $x = 31z - 2$ e $y = 3 - 13z$

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (31z - 2, 3 - 13z, z) \\ &= (31z, -13z, z) + (-2, 3, 0) \\ &= (31, -13, 1)z + (-2, 3, 0)\end{aligned}$$

recta de intersección:

$r : (x, y, z) = (31, -13, 1)z + (-2, 3, 0).$

PRODUCTO ESCALAR

Dados $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define el producto escalar de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Lo anterior define una función

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

la cual otorga a $\mathbb{R}^n$ la propiedad de "medir" distancia entre puntos y ángulos entre vectores.

Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, se define la norma de $\vec{x}$ como

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

Ejemplo: $\vec{x} = (1,1,1)$, $\vec{y} = (3,-3,0)$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = 0$$

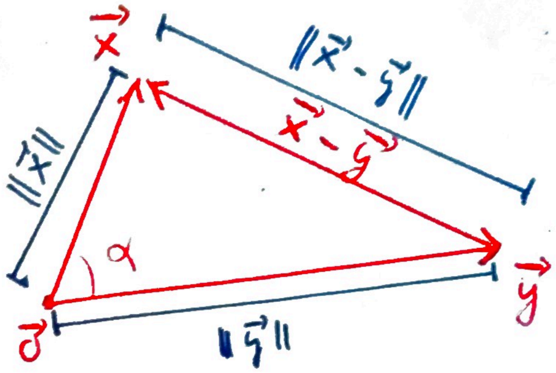
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{3 \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) + 0 \cdot 0} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

Observación:

1) $\|\vec{x}\|$ mide la distancia de $\vec{x}$ al origen.

Dados $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ mide la distancia entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$.



(*)

2) Con $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ $(\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3)$ se puede hallar el ángulo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$. si $\vec{x} \neq \vec{0}$ e $\vec{y} \neq \vec{0}$.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\alpha)$$

Propiedades:

1) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0.$, y $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ sii $\vec{x} = \vec{0}$.

2) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

3) $\langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle$

4) $\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

5). $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$

6) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Proposición: Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ no nulos, entonces

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\alpha).$$

• Demostración: A partir de la figura (*) y de la ley del coseno, se tiene que:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\alpha)$$

$$\langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\alpha)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\alpha)$$

$$\cancel{\|\vec{x}\|^2} - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \cancel{\|\vec{y}\|^2} = \cancel{\|\vec{x}\|^2} + \cancel{\|\vec{y}\|^2} - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\alpha)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\alpha)$$

∎

<u>Definición</u>: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son <u>ortogonales</u> o <u>perpendiculares</u> si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

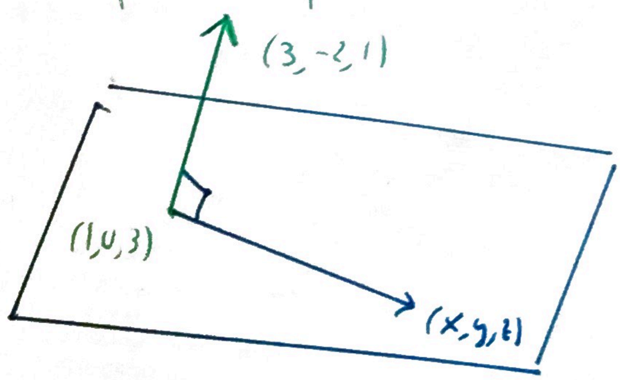
<u>Ejemplo</u>: Ecuación reducida del plano y producto escalar.

$3x - 2y + z = 6$.

Considere el vector $\vec{n} = (3, -2, 1)$.

El punto $(1, 0, 3)$ satisface la ecuación del plano.

Sea (x, y, z) otro punto que pasa por el plano



$$\langle (x,y,z) - (1,0,3), (3,-2,1) \rangle = 0$$

$$\langle (x-1, y, z-3), (3,-2,1) \rangle = 0$$

$$3(x-1) - 2y + z - 3 = 0$$

$$3x - 2y + z - 6 = 0$$

$$3x - 2y + z = 6$$

Si π es el plano que pasa por $P=(p_1, p_2, p_3)$ y perpendicular a $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ (dirección normal), entonces (x, y, z) pertenece a dicho plano si $(x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)$ es perpendicular a (n_1, n_2, n_3). Es decir,

$$\langle (x, y, z) - (p_1, p_2, p_3), (n_1, n_2, n_3) \rangle = 0$$

Al desarrollar la igualdad anterior se llega a la ecuación reducida del plano.

Producto Vectorial

$$- \wedge \sim : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longmapsto u \wedge v$$

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ em $\mathbb{R}^3$

$$u \wedge v := \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

donde $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 1)$

- $u \wedge v$ se calcula como un determinante:

$$u \wedge v = i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= i\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) + j\,(u_3 v_1 - u_1 v_3) + k\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Ejemplo: Calcule para $u = (2, -1, 1)$ y $v = (-3, 1,$ el producto vectorial $u \wedge v$.

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i\,(-1\cdot 1 - 1\cdot 1) - j\,(2\cdot 1 - (-3)\cdot 1) + k\,(2\cdot 1 - (-3)(-1))$$

$$= i\,(-2) - j\cdot 5 + k\,(-1)$$

$$= (-2, -5, -1)$$

Calculemos además $\langle u\wedge v, u\rangle$ y $\langle u\wedge v, v\rangle$:

$$\langle u\wedge v, u\rangle = \langle (-2,-5,-1), (2,-1,1)\rangle$$
$$= -2\cdot 2 + (-5)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1$$
$$= -4 + 5 - 1 = 0.$$

$$\langle u\wedge v, v\rangle = \langle (-2,-5,-1), (-3,1,1)\rangle$$
$$= (-2)(-3) + (-5)\cdot 1 + (-1)\cdot 1$$
$$= 6 - 5 - 1 = 0.$$

Los cálculos anteniones mo som uma cascalidad.

Pnoposicióm: Pana todo $u, v \in \mathbb{R}^3$, se tieme que $u\wedge v \perp u$ y $u\wedge v \perp v$.

· **Demostración:**

$$\langle u \wedge v, u \rangle = \langle (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1), (u_1, u_2, u_3) \rangle$$

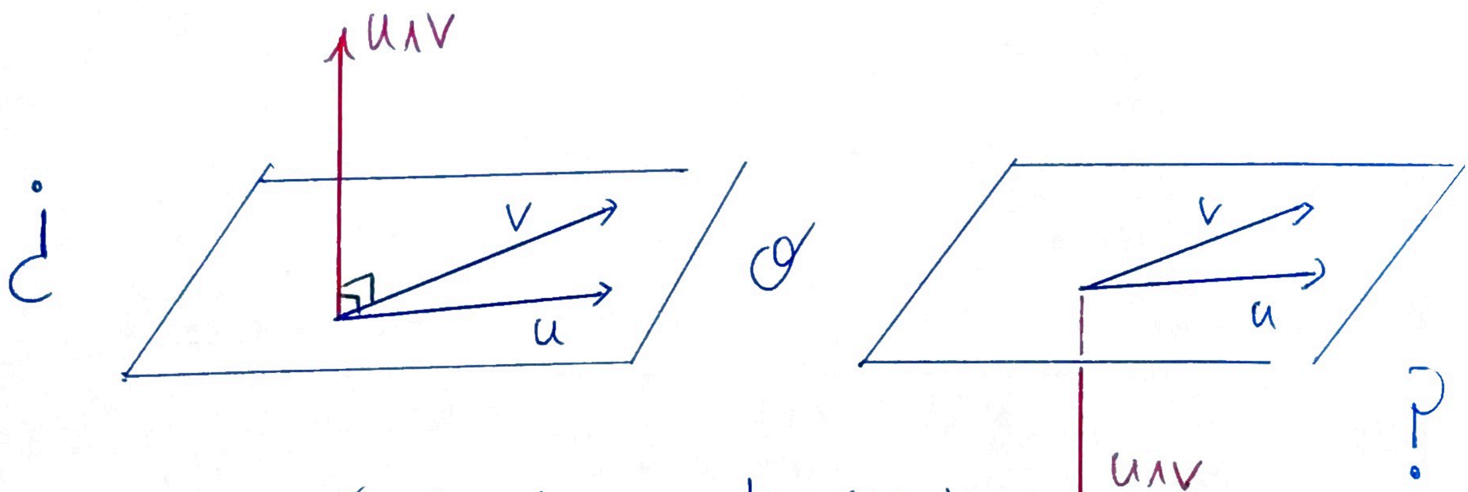
$$= u_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= \cancel{u_1 u_2 v_3} - \cancel{u_1 u_3 v_2} + \cancel{u_2 u_3 v_1} - \cancel{u_1 u_2 v_3} + \cancel{u_1 u_3 v_2} - \cancel{u_2 u_3 v_1}$$

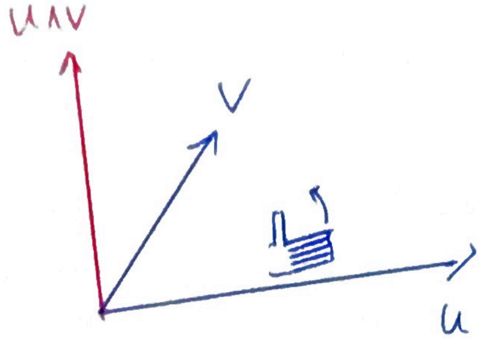
$$= 0$$

De manera análoga, $\langle u \wedge v, v \rangle = 0$. ■

Gráficamente:



El sentido (a donde apunta $u \wedge v$) está determinado por la <u>Regla de la mano derecha</u>.



Regla de la mano derecha: Se coloca el borde inferior de la mano derecha sobre el vector u. Manteniendo el pulgar arriba, se cierran los cuatro dedos restantes hacia el vector v. El vector u∧v apunta en el mismo sentido que el pulgar.

Ejemplo: Hallar la ecuación implícita o reducida del plano π con direcciones $u = (1, 3, 2)$ y $v = (4, 0, -5)$, y que pasa por el punto $(0, 1, -2)$.

$u \wedge v$ es perpendicular al plano π.

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (3\cdot(-5) - 2\cdot 0,\ 4\cdot 2 - 1(-5),\ -4\cdot 3)$$

$$= (-15, 13, -12)$$

$\pi: \langle (x,y,z)-(0,1,-2), (-15,13,-12)\rangle = 0$

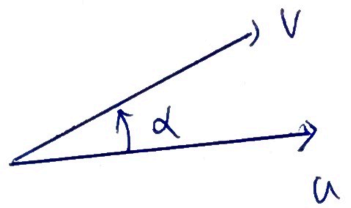
$\langle (x, y-1, z+2), (-15,13,-12)\rangle = 0$

$-15x + 13y - 13 - 12z - 24 = 0$

$15x - 13y + 12z = -36$

Propiedades del producto vectorial:

1) $u \wedge v \perp u$ y $u \wedge v \perp v$.
2) $u \wedge v = -v \wedge u$ (amticommutatividad).
3) $u \wedge v = 0$ si y sólo si u y v som colimeales.
4) $\| u \wedge v \| = \|u\| \cdot \|v\| \operatorname{sem}(\alpha)$ pana $u, v \neq 0$



5) Idemtidad de Jacobi:

$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = \vec{0}$$

Em panticulan, el pnoducto vectonial mo es asociativo.

6) $\lambda (u \wedge v) = (\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
7) $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v,$
$u \wedge (v_1 + v_2) = u \wedge v_1 + u \wedge v_2.$

· Demostración: Haremos sólo la demostración de

($\Longrightarrow$) Supongamos que u y v son colineales

$v = \lambda u$ (el caso $u = \lambda v$ es análogo)

Para $u = (u_1, u_2, u_3)$, se tiene $v = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$

Luego,

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda u_2 u_3 - \lambda u_2 u_3, \lambda u_1 u_3 - \lambda u_1 u_3, \lambda u_1 u_2 - \lambda u_1 u$$

$$= (0, 0, 0)$$

($\Longleftarrow$) Supongamos $u \wedge v = \vec{0}$.

- Si $u = 0$, entonces $u = 0 \cdot v$ y así u y son colineales.
- Si $v = 0$, entonces $v = 0 \cdot u$ y así u y son colineales.
- Entonces podemos asumir que $u, v \neq 0$.
  $u \wedge v = \vec{0} \Longrightarrow \|u \wedge v\| = 0$.
  Por otro lado, $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen}(\alpha)$
  donde α es el ángulo entre u y v.

Así, $\|u\| \, \|v\| \, \text{sen}(\alpha) = 0$.

Como $\|u\|, \|v\| \neq 0$, nos queda $\text{sen}(\alpha) = 0$

Para $\alpha \in [0, \pi]$, se tiene que

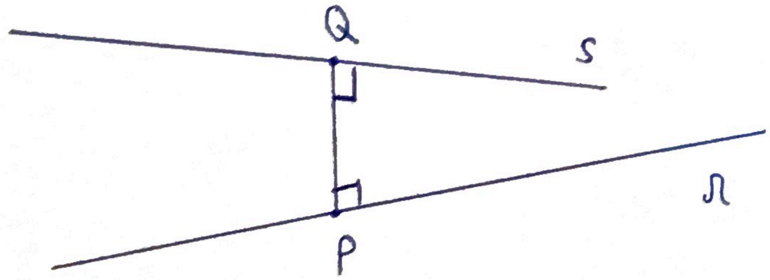
$$\text{sen}(\alpha) = 0 \implies \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = \pi.$$

$\therefore$ u y v son colineales. ■

Aplicación: distancia entre rectas.

Calcule la distancia entre las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{-5}$$



Hallamos $P \in r$ y $Q \in s$ tales que $\vec{PQ} \perp (6, 1, -2)$ y $\vec{PQ} \perp (2, 1, -5)$. Es decir, $\vec{PQ}$ debe ser colineal con $(6, 1, -2) \wedge (2, 1, -5)$.

$$(6,1,-2)\wedge(2,1,-5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-5+2, -4+30, 6-2)$$

$$= (-3, 26, 4)$$

$$P = t(6,1,-2) + (1,-4,3)$$

$$Q = \lambda(2,1,-5) + (3,0,-1)$$

$$\vec{PQ} = Q - P = \lambda(2,1,-5) + (3,0,-1)$$

$$- t(6,1,-2) - (1,-4,3)$$

$$\vec{PQ} = (2\lambda - 6t + 2, \lambda - t + 4, 2t - 5\lambda - 4)$$

Queremos hallar t y λ en $\mathbb{R}$ tales que

$$\vec{PQ} \wedge (-3, 26, 4) = (0,0,0)$$

$$0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\lambda - 6t + 2 & \lambda - t + 4 & 2t - 5\lambda - 4 \\ -3 & 26 & 4 \end{vmatrix}$$

$$0 = (4\lambda - 4t + 16 - 52t + 130\lambda - 104,$$
$$-6t + 15\lambda + 12 - 8\lambda + 24t - 8,$$
$$52\lambda - 156t + 52 + 3\lambda - 3t + 12)$$

$$0 = (134\lambda - 56t - 88, 7\lambda + 18t + 4, 55\lambda$$
$$-159t$$
$$+64)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 134\lambda - 56t = 88 \\ 7\lambda + 18t = -4 \\ 55\lambda - 159t = -64 \end{cases}$$

Problemas de distancia

1) Distancia de un punto a una recta

Hallar la distancia del punto $P = (3, 2, -2)$ a la recta $r: \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+5}{1}$.

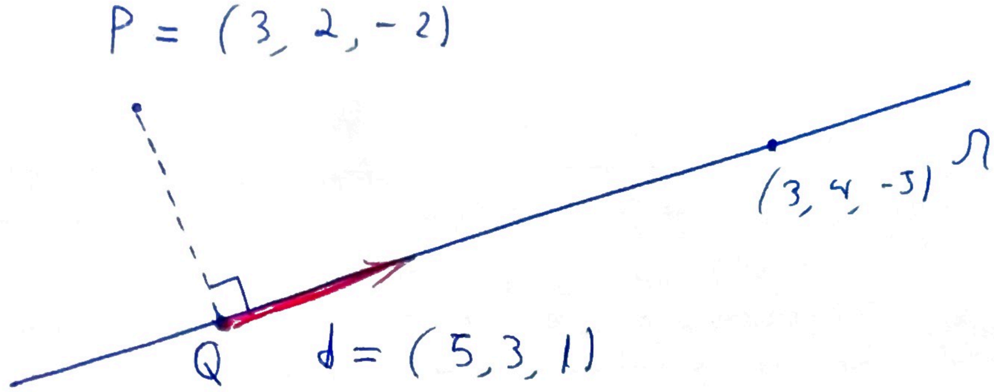
Pasamos r a su forma vectorial.

$$\frac{x-3}{5} = \lambda \Longrightarrow x = 5\lambda + 3$$

$$\frac{y-4}{3} = \lambda \Longrightarrow y = 3\lambda + 4$$

$$\frac{z+5}{1} = \lambda \Longrightarrow z = \lambda - 5$$

$$\begin{aligned} r: (x, y, z) &= (5\lambda + 3, 3\lambda + 4, \lambda - 5) \\ &= (5\lambda, 3\lambda, \lambda) + (3, 4, -5) \\ &= \lambda(5, 3, 1) + (3, 4, -5) \end{aligned}$$



$Q \in \mathcal{R}$ es t.q. $\overrightarrow{PQ} \perp d$

$$Q = \lambda (5, 3, 1) + (3, 4, -5)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (3, 2, -2) - \lambda (5, 3, 1) - (3, 4, -5)$$

$$= (0, -2, 3) + (-5\lambda, -3\lambda, -\lambda)$$

$$= (-5\lambda, -2 - 3\lambda, 3 - \lambda)$$

$$0 = \langle \overrightarrow{PQ}, d \rangle = 5 \cdot (-5\lambda) + 3(-2 - 3\lambda) + 3 - \lambda$$

$$0 = -25\lambda - 6 - 9\lambda + 3 - \lambda$$

$$0 = -35\lambda - 3$$

$$35\lambda = -3$$

$$\lambda = -\frac{3}{35}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{3}{7}, -2 + \frac{9}{35}, 3 + \frac{3}{35}\right) = \left(\frac{3}{7}, -\frac{61}{35}, \frac{10}{35}\right.$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{35}(15, -61, 108)$$

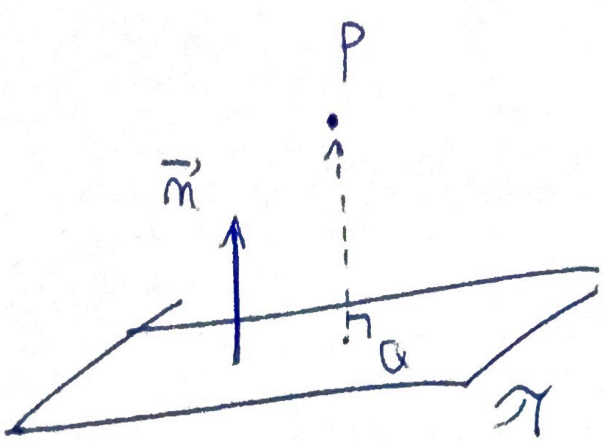
$$d(P, r) = \frac{1}{35}\sqrt{15^2 + 61^2 + 108^2}$$

$$= \frac{1}{35}\sqrt{225 + 3721 + 11664}$$

$$= \frac{1}{35}\sqrt{15610}$$

2. Distancia de un punto a un plano.

Hallar la distancia del punto $P = (3, 1, -2)$ al plano $\pi : 2x + y - z = -1$.



$Q \in \pi$ es tal que $\overrightarrow{QP} \parallel \vec{n}$

$Q = (x_0, y_0, z_0) \in \pi. \quad 2x_0 + y_0 - z_0 = -1$

$\vec{QP} = P - Q = (3, 1, -2) - (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{QP} = (3 - x_0, 1 - y_0, -2 - z_0)$

$\vec{n} = (2, 1, -1)$

$\vec{QP} = \lambda \vec{n}$ para algúm $\lambda \neq 0$.

$(3 - x_0, 1 - y_0, -2 - z_0) = \lambda (2, 1, -1)$

$3 - x_0 = 2\lambda$

$1 - y_0 = \lambda$

$-2 - z_0 = -\lambda$

$d(P, \pi) = \| \vec{QP} \| = |\lambda| \, \|(2, 1, -1)\|$

$d(P, \pi) = |\lambda| \sqrt{6}$

$-1 = 2x_0 + y_0 - z_0 = 2(3 - 2\lambda) + (1 - \lambda) + (2 - \lambda)$

$-1 = 6 - 4\lambda + 1 - \lambda + 2 - \lambda$

$-1 = -6\lambda + 9$

$10 = 6\lambda$

$\lambda = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$d(P, \pi) = \frac{5}{3} \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$= \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$