3 DETERMINANTES

En este capítulo estudiaremos una función

$$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

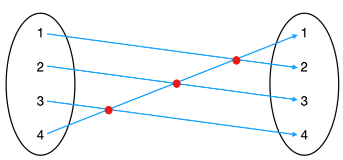
del conjunto de matrices cuadradas $n \times n$ al conjunto de los números reales capaz de *determinar* si los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, $A\,X = b$, son compatibles.

Esta función, llamada *determinante*, no es fácil de definir. De hecho, existen dos enfoques diferentes a esta definición:

- Enfoque combinatorio: Dada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se define el determinante de A como

  $$\det(A) := \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \text{signo}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

  En esta fórmula, $\mathcal{S}_n$ denota el conjunto de todas las permutaciones de orden n, es decir, $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si $\sigma\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ es una biyección. Por otro lado, el signo de σ se define a partir del número de cruces que ocurre en una permutación, dependiendo si este número es par o impar. Por ejemplo, la permutación

  en $\mathcal{S}_4$ tiene signo igual a $-1 = (-1)^3$, porque tiene tres cruces.

  Esta definición de determinante es más útil a la hora de hacer demostraciones, y tiene más presencia en cursos más ortodoxos de álgebra lineal. Sin embargo, a la hora de hacer cálculos, la fórmula anterior resulta poco conveniente (¡tenga en cuenta que $\mathcal{S}_n$ tiene $n!$ elementos!). El enfoque que daremos a la definición de determinante es más algorítmico e inductivo.

- Enfoque algorítmico-inductivo: Es el enfoque que vamos a seguir en este curso. Consiste en definir $\det(A)$ mediante inducción sobre n. Es decir, vamos primero a definir el determinante para matrices de tamaño $n = 1$ y $n = 2$. Luego, suponiendo que “conocemos” cómo se define el determinante para matrices de tamaño $n - 1$, damos una fórmula para matrices de tamaño n. Esto lo desarrollaremos en la siguiente sección.

La función determinante tiene aplicaciones dentro y fuera del álgebra lineal y la geometría. Mencionamos algunas como motivación:

1. Saber si una matriz es invertible y, en tal caso, dar una fórmula explícita que calcule su inversa.
2. Determinar si un sistema de ecuaciones $A\ X = b$ (donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$) es compatible determinado, y en tal caso, dar una fórmula explícita para su solución (regla de Cramer).
3. Cálculo del área de un paralelogramo, y del volumen de un paralelepípedo.

Estas primeras aplicaciones son las que nos van a interesar en este curso, pero también podemos utilizar las funciones de determinantes en las siguientes situaciones:

4. Cálculo de valores propios de una matriz. Esto sirve para determinar si una matriz es *semejante* a una matriz diagonal.
5. Clasificación de puntos críticos de una función de dos variables que satisfaga ciertas condiciones de diferenciabilidad.

3.1. Definición inductiva de determinante

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Vamos a definir inductivamente cómo se calcula $\det(A)$.

- Para $n = 1$: Definimos el determinante de $A = (a_{11})$ simplemente como

$$\det(A) := a_{11}.$$

- Para $n = 2$: Definimos el determinante de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ como

$$\det(A) := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

- Paso inductivo: Supongamos que sabemos calcular $\det(A')$ para cualquier matriz $A' \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$. A partir de esto, definamos cómo calcular $\det(A)$ para

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sea $A_{ij} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A tal matriz se le conoce como **matriz menor** asociada al coeficiente a_{ij}. Luego, se define mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \det(A) :=& (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \cdot \det(A_{21}) + \cdots \\ & \cdots + (-1)^{n-1+1} a_{n-1\ 1} \cdot \det(A_{n-1\ 1}) + (-1)^{n+1} a_{n1} \cdot \det(A_{n1}). \end{aligned}$$

Al término $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ se le conoce como **cofactor** asociado al coeficiente a_{ij}. A la expresión anterior para calcular el determinante se le conoce como **desarrollo por cofactores**. Note que en tal desarrollo, se han tomado los cofactores que se generan a lo largo de la primera columna de A. Más adelante, mediante las propiedades, veremos que se puede hacer el desarrollo por cofactores a lo largo de cualquier fila (o columna) de A.

Hagamos algunos ejemplos para entender cómo funciona la fórmula anterior.

Ejemplo 22. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

1. $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (matriz de rotación de ángulo θ alrededor del origen).

   $\det(R_\theta) = \cos(\theta)\cdot\cos(\theta) - \sin(\theta)\cdot(-\sin(\theta)) = [\cos(\theta)]^2 + [\sin(\theta)]^2 = 1$ (identidad trigonométrica fundamental).

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & -10 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{4} & 0 & 0 \\ \cancel{-8} & 5 & -10 \end{pmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix} \cancel{0} & 2 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-8} & 5 & -10 \end{pmatrix}$$
$$+ (-8)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix} \cancel{0} & 2 & 0 \\ \cancel{4} & 0 & 0 \\ \cancel{-8} & \cancel{5} & \cancel{-10} \end{pmatrix}$$
$$= 0\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} + 4\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} + (-8)\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 0 - 4(2\cdot(-10) - 0\cdot 5) - 8(2\cdot 0 - 0\cdot 0) = -4(-20) - 8\cdot 0 = 80.$$

3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -10 \end{pmatrix}$.

$$\det(B) = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{3} & 0 & 2 & 0 \\ \cancel{-2} & 4 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & -8 & 5 & -10 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{-2} & 4 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & -8 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$
$$+ (-1)^{3+1}\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{3} & 0 & 2 & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & -8 & 5 & -10 \end{pmatrix} + (-1)^{4+1}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{3} & 0 & 2 & 0 \\ \cancel{-2} & 4 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{5} & \cancel{-10} \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & -10 \end{pmatrix} - 3\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & -10 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

   Como ejercicio, calcule los dos últimos determinantes y constate que valen cero. Luego, por el ejemplo anterior, tenemos que

$$\det(B) = 80 - 3\cdot 0 - 2\cdot 0 = 80.$$

   Gracias a las propiedades de los determinantes que vamos a enunciar en la siguiente sección, este cálculo (y el de cualquier determinante) se podrá hacer de manera más sencilla.

3.2. Propiedades del determinante

El determinante es una función muy rica en propiedades lineales y combinatorias. Vamos a describir la mayoría de estas propiedades a continuación. Aplicadas correctamente, estas propiedades simplifican de manera considerable el cálculo de cualquier determinante. En términos generales, la idea es aplicar a la matriz A operaciones elementales y calcular el determinante de cualquiera de sus formas escalerizadas, ya que este tipo de matrices está entre los que tienen determinantes más fáciles de calcular.

Dividiremos las propiedades del determinante en varios grupos, para tener una mejor deferencia cuando necesitemos invocarlas. En lo que sigue, hay ocasiones en las cuales nos será más cómodo representar una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como el arreglo

$$A = \begin{pmatrix} F_1(A) \\ F_2(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix}$$

formado por sus filas.

Proposición 3.1: propiedades de linealidad por filas

Para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

- **[aditividad en cada fila]:** Si $B \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ F_i(A) + B \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ F_i(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix}.$$

- **[homogeneidad en cada fila]:** Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ \alpha F_i(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ F_i(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix}.$$

En resumen, el resultado anterior nos dice que el determinante es una función lineal por filas, es decir,

$$\det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ \alpha\, F_i(A) + B \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ F_i(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix}.$$

Es muy importante que la linealidad en $\det(-)$ ocurre a nivel de las filas de la matriz, no a nivel del argumento de la función. Es decir, **no es cierto que**

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B) \ \text{ y } \ \det(\alpha\, A) = \alpha \det(A).$$

Por ejemplo, si consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, podemos ver que

$$\det(A+B) = 0 \ \text{ y } \ \det(A) = \det(B) = 1.$$

Además,

$$\det(2\, A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \ \text{ y } \ 2 \det(A) = 2.$$

Ahora, sí es cierto que lo siguiente.

Corolario 3.1

Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\det(\alpha\, A) = \alpha^n \det(A).$$

Demostración: La idea es aplicar la propiedad de homogeneidad por filas en cada fila de A (n veces):

$$\det(\alpha A) = \det \begin{pmatrix} \alpha\, F_1(A) \\ \alpha\, F_2(A) \\ \vdots \\ \alpha\, F_n(A) \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \alpha\, F_2(A) \\ \vdots \\ \alpha\, F_n(A) \end{pmatrix} = \alpha^2 \det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ F_2(A) \\ \vdots \\ \alpha\, F_n(A) \end{pmatrix} = \cdots = \alpha^n \ \det \begin{pmatrix} F_1(A) \\ F_2(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix}$$
$$= \alpha^n \det(A).$$

$\square$

Proposición 3.2: determinantes bajo transformaciones elementales

Para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, sean A_1, A_2 y A_3 las matrices resultantes de aplicarle a A la transformación elemental $\alpha\, F_i$, $F_i \leftrightarrow F_j$ y $F_i \leftarrow (F_i + \alpha\, F_j)$, respectivamente. Entonces:

- $\det(A_1) = \alpha \det(A)$.
- $\det(A_2) = -\det(A)$.
- $\det(A_3) = \det(A)$.

Proposición 3.3: anulación inmediata del determinante

Para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que
$$\det(A) = 0$$
si ocurre alguna de las siguientes condiciones:

1. A posee una fila nula.
2. A posee dos filas iguales.
3. A tiene una fila que es *combinación lineal* de las filas restantes. Es decir, existen $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_k} \in \mathbb{R}$ con $j_1 < \cdots < j_k$ en $\{1,\ldots,n\}$ tales que
$$F_i(A) = \alpha_{j_1}\, F_{j_1}(A) + \cdots + \alpha_{j_k}\, F_{j_k}(A).$$

Ejemplo 23. Determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1.$$

Usando las propiedades anteriores, tenemos que

$$1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(aditividad por filas)}$$
$$1 = \lambda \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(homogeneidad por filas)}$$
$$1 = \lambda \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \qquad (F_i \leftarrow (F_i + \alpha\, F_j))$$
$$1 = \lambda \cdot 0 + 0. \qquad \text{(filas coincidentes y/o combinación lineal)}$$

Por lo tanto, no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaga la igualdad planteada.

Ahora que tenemos más propiedades a la mano, volvamos a calcular el determinante del Ejemplo 22-3.

Ejemplo 24. Para $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -10 \end{pmatrix}$, tenemos

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -10 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -10 \end{pmatrix} \qquad \text{(aplicando } F_2 \leftarrow (F_2 - 3F_1) \text{ y } F_3 \leftarrow (F_3 + 2F_1))$$
$$= 2\cdot 4\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -10 \end{pmatrix} \qquad \text{(homogeneidad)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 8 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} && \text{(aplicando } F_4 \leftarrow (F_4 + 8F_3) \text{ y } F_4 \leftarrow (F_4 - 5F_1)) \\
&= -80 \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{(homogeneidad y aplicando } F_2 \leftrightarrow F_3) \\
&= 80 \cdot \det(I_4) = 80.
\end{aligned}
$$

Un ejercicio sencillo consiste en ver que el determinante de la matriz identidad vale 1. Tal resultado coincide justamente con multiplicar los coeficientes de la diagonal. Esto no es casualidad, sino consecuencia de una propiedad más general, que enunciamos a continuación.

Proposición 3.4: determinantes de matrices especiales

- **[determinantes de matrices triangulares]:** Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior o triangular inferior, es decir, A es de la forma

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

  Entonces,

$$
\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{n-1\,n-1} a_{nn}.
$$

- **[determinantes de matrices por bloques]:** Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$
\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{m\times n} & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B).
$$

Ejemplo 25. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$
\det(A) = 3 \cdot 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$= 18\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 18\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 18\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -18\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 18\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 18 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -18.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 10 & 0 & 20 \\ 2 & 2 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 10 & 0 & 20 \\ 2 & 2 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 16 \end{array}\right) = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 12 & 1 & 15 \\ -7 & 3 & 10 \\ -6 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 12 & 1 & 15 \\ -7 & 3 & 10 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = -4\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 25 & -57 \\ 0 & -11 & 52 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1}.\det\begin{pmatrix} 25 & -57 \\ -11 & 52 \end{pmatrix}$$

$$= -4(7+10)(25 \cdot 52 - 11 \cdot 57) = -68(1300 - 627) = -68 \cdot 673 = -45764.$$

Proposición 3.5: invariancia bajo transposición

Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se cumple que $\det(A) = \det(A^t)$.

La propiedad anterior implica que todas las propiedades del determinante relativas a las filas de una matriz son también válidas al aplicarse a las columnas. Por ejemplo, si intercambio dos columnas en una matriz, su determinante cambia de signo. Otra consecuencia de esto es que el desarrollo por cofactores puede hacerse a lo largo de cualquier fila o de cualquier columna de la matriz. Hagamos un ejemplo al respecto.

Ejemplo 26. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & -2 & -9 \\ 2 & 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -11 \\ 3 & 7 & 0 & -15 \\ 2 & 4 & 0 & -9 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{-6} \\ 2 & 5 & \cancel{0} & -11 \\ 3 & 7 & \cancel{0} & -15 \\ 2 & 4 & \cancel{0} & -9 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -11 \\ 3 & 7 & -15 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$
$$= 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -11 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 2.$$

3.3. Relación entre determinantes y matrices invertibles

En esta sección nos enfocaremos en demostrar el siguiente criterio de invertibilidad para matrices cuadradas.

Teorema 3.1

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

Antes de demostrar este teorema, necesitamos una serie de herramientas previas. Podemos usar lo que sabemos hasta el momento sobre matrices elementales. Si R denota la forma escalerizada reducida de A, sabemos podemos hallar un número finito de matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_1 A = R.$$

Sabemos que A es invertible si, y sólo si, $R = I_{n\times n}$. Luego, tiene sentido estudiar los determinantes de matrices elementales si queremos demostrar el teorema enunciado anteriormente.

Comencemos entonces con el siguiente resultado.

Proposición 3.6

Considere las transformaciones elementales $\alpha\, F_i$ (con $\alpha \neq 0$), $F_i \leftrightarrow F_j$ y $F_i \leftarrow (F_i + \alpha\, F_j)$, y sean E_1, E_2 y E_3 las matrices elementales asociadas a cada una de las transformaciones anteriores, respectivamente. Entonces,

$$\det(E_1) = \alpha,\ \det(E_2) = -1 \ \text{ y} \det(E_3) = 1.$$

En particular, toda matriz elemental tiene determinante no nulo.

Demostración: El resultado es consecuencia de la Proposición 3.2. En efecto, como E_1, E_2 y E_3 se obtienen de aplicar $\alpha\, F_i$ (con $\alpha \neq 0$), $F_i \leftrightarrow F_j$ y $F_i \leftarrow (F_i + \alpha\, F_j)$, respectivamente, a la matriz identidad $I_{n\times n}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\det(E_1) &= \alpha \det(I_{n\times n}) = \alpha \cdot 1 = \alpha,\\
\det(E_2) &= -\det(I_{n\times n}) = -1,\\
\det(E_3) &= \det(I_{n\times n}) = 1.
\end{aligned}$$

□

A continuación enunciamos una versión un poco más general del resultado anterior.

Proposición 3.7

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y E_i una matriz elemental (con $i = 1, 2$, o 3, y haciendo referencia a la nomenclatura de la proposición anterior). Entonces,

$$\det(E_i\, A) = \det(E_i) \cdot \det(A).$$

Demostración: Debemos hacer un análisis por caso, dependiendo de la transformación elemental que define a E_i. En lo que sigue, denotaremos por B a la matriz que se obtiene aplicando a A la transformación elemental correspondiente a E_i.

- Caso $i = 1$: Por la Proposición 3.2 y la proposición anterior, tenemos que

  $$\det(B) = \alpha \det(A) = \det(E_1) \cdot \det(A).$$

  Por otro lado, por la Proposición 2.8, tenemos que $B = E_1\, A$. Por lo tanto,

  $$\det(E_1\, A) = \det(E_1) \cdot \det(A).$$

- Casos $i = 2$ e $i = 3$: Se siguen de manera análoga al anterior.

□

Aplicando el resultado anterior un número finito y arbitrario de veces, tenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 3.2

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices elementales. Si $B = E_k \cdots E_1 A$, entonces

$$\det(B) = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \cdot \det(A).$$

Estamos ahora listos para demostrar el teorema principal de esta sección.

Idea de la demostración del Teorema 3.3: Sea $R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la forma escalerizada de A. Vamos a buscar una relación entre los determinantes de A y de R. Como mencionamos anteriormente,

$$R = E_k \cdots E_1 A$$

donde $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son matrices elementales. Por el corolario y propiedades anteriores, tenemos que

$$\det(R) = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \cdot \det(A).$$

Como $\det(E_k), \ldots, \det(E_1) \neq 0$ por la Proposición 3.3, tenemos entonces que $\det(A) \neq 0$ si, y sólo si, $\det(R) \neq 0$ (o equivalentemente, $\det(A) = 0$ si, y sólo si, $\det(R) = 0$). Luego, determinar si A es invertible o no pasa por evaluar el determinante de la forma escalerizada reducida R. □

Demostración del Teorema 3.3:

- ($\Longrightarrow$): Supongamos primero que A es invertible. Luego, $R = I_{n\times n}$. Queda entonces que

  $$\det(R) = \det(I_{n\times n}) = 1 \neq 0,$$

  lo cual implica que $\det(A) \neq 0$ por las observaciones anteriores.

- ($\Longrightarrow$): Probaremos esta implicación usando un método de demostración conocido como “prueba del contrarrecíproco”. Consiste en los siguiente: probar la implicación

  $$\det(A) \neq 0 \implies A \text{ es invertible},$$

  es equivalente a probar la implicación contrarrecíproca, a saber,

  $$A \text{ no es invertible} \implies \det(A) = 0.$$

  Supongamos entonces que A no es invertible. Luego, como $\operatorname{rg}(A) < n$ en este caso, debe ocurrir que R tenga al menos una fila de ceros (recuerde que el rango de A se define como el número de filas no nulas de su forma escalerizada reducida R). Por propiedades del determimante, esto conlleva a que $\det(R) = 0$, lo cual a su vez implica que $\det(A) = 0$.

□

3.4. Fórmula de Binet-Cauchy

En esta última sección estudiaremos cómo calcular el determinante de un producto de matrices. Ya sabemos que si $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz elemental y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz cualquiera, entonces

$$\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A).$$

Es natural preguntarse si la propiedad anterior también vale al cambiar E por una matriz cualquiera $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. La respuesta es sí, gracias a un resultado conocido como la fórmula de Binet-Cauchy, la cual vamos a demostrar.

Teorema 3.2: Fórmula de Binet-Cauchy

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Idea de la demostración: Debemos conectar de alguna forma el Corolario 3.3 (caso particular de la fórmula de Binet-Cauchy) con lo que se quiere probar. Entonces, nos hacemos la pregunta: ¿A se puede escribir siempre como producto de matrices elementales, y así la fórmula sería consecuencia directa del mencionado corolario? La respuesta es no, en general. Recuerde que A se escribe como producto de matrices elementales si, y sólo si, A es invertible. Entonces, debemos dividir nuestra demostración en un análisis por casos: cuando A es invertible y cuando no lo es. □

Demostración:

- Caso donde A es invertible: Escribimos $A = E_1 \cdots E_k$, donde $E_1, \ldots, E_k$ son matrices elementales (ver el Teorema 2.8). Luego, por el Corolario 3.3 tenemos

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k B) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \cdot \det(B).$$

  Aplicando nuevamente el Corolario 3.3 (haciendo $B = I_{n\times n}$ en su enunciado), obtenemos

$$\det(E_1) \cdots \det(E_k) = \det(E_1 \cdots E_k).$$

  Por lo tanto,

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

- Caso donde A no es invertible: En este caso, sabemos que $\det(A) = 0$ por el Teorema 3.3. Entonces, la fórmula de Binet-Cauchy va a cumplirse si $\det(AB) = 0$, es decir, si AB no es invertible. Esto último en efecto ocurre, ya que AB es invertible si, y sólo si, A y B lo son (o equivalentemente, AB no es invertible si, y sólo si, A no es invertible o B no es invertible). Por lo tanto,

$$\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

□

Finalizamos con algunas consecuencias de la fórmula de Binet-Cauchy.

Corolario 3.3

Las siguientes igualdades se cumplen:

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
2. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, y denotamos por A^n el producto $A \cdots A$ (n veces). Entonces,

$$\det(A^n) = [\det(A)]^n.$$

   En particular, $\det(A^2) = [\det(A)]^2$.

Ejemplo 27.

1. Sabiendo que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = 3$, calcular $\det(A^2B^{-1})$.

   Aplicamos las propiedades anteriores paso a paso:

$$\det(A^2B^{-1}) = \det(A^2) \cdot \det(B^{-1}) = [\det(A)]^2 \cdot \frac{1}{\det(B)} = 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

2. Calcule $\det(A - B)$ sabiendo que $\det(A) = 3$, $\det(A^2 + AB) = 6$ y $\det(A^2 + AB - BA - B^2) = 4$.

   La idea es factorizar las expresiones dentro de los determinantes y aplicar las propiedades para poder despejar lo que queremos calcular. En efecto, como

$$A^2 + AB - BA - B^2 = A(A + B) - B(A + B) = (A - B)(A + B),$$

tenemos que

$$4 = \det(A^2 + AB - BA - B^2) = \det\big((A - B)(A + B)\big) = \det(A - B) \cdot \det(A + B).$$

Entonces, necesitamos $\det(A+B)$ para llegar al resultado. Para eso, tenemos los datos restantes del problema:

$$A^2 + AB = A(A + B),$$
$$6 = \det(A^2 + AB) = \det\big(A(A + B)\big) = \det(A) \cdot \det(A + B) = 3\det(A + B).$$

De lo anterior se tiene que

$$\det(A + B) = 2.$$

Luego,

$$4 = \det(A - B) \cdot \det(A + B) = 2\det(A - B).$$

Por lo tanto, $\det(A - B) = 2$.

Escrito en LaTeX por:
Marco A. Pérez, Ph.D.
Profesor Adjunto Grado 3
Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Ing. Rafael Laguardia”
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
Oficina 122
mperez@fing.edu.uy