II. ALGUNAS APLICACIONES

EN ESTE capítulo desarrollaremos algunas aplicaciones de la teoría de matrices, formas de Jordan y sistemas de ecuaciones diferenciales que estudiamos en el primer capítulo. Las aplicaciones del álgebra lineal en diversas áreas de la economía, de la biología, de la física y de otras muchas ciencias son fundamentales. En este capítulo veremos dos ejemplos clásicos de aplicaciones. No profundizaremos mucho en la dirección de ninguna de estas aplicaciones, pues esto nos llevaría a consideraciones particulares fuera de nuestro tema central de discusión. En capítulos posteriores examinaremos otras aplicaciones.

En general, los problemas del mundo físico (en donde incluimos los problemas biológicos y humanos) son muy complejos. Para intentar comprenderlos más a fondo y poder predecir el comportamiento de la naturaleza se crean modelos matemáticos. Estos modelos se estudian con las herramientas matemáticas apropiadas. Por supuesto, en algunos casos las herramientas matemáticas no han sido aún desarrolladas al nivel adecuado que permitiría una solución completa de las ecuaciones surgidas a partir de los modelos.

En muchos problemas del mundo físico se busca como primera alternativa crear un modelo lineal del problema. Este modelo lineal puede intentar estudiarse y resolverse por medio de las técnicas del álgebra lineal. Por supuesto, éste es el tipo de modelos que consideraremos en este capítulo.

En algunos casos los modelos lineales son muy exitosos en la solución de los problemas dados; en la mayoría de los casos, sólo en situaciones particulares se obtiene una buena solución del problema. Otro aspecto que debe considerarse es el hecho de que el estudio de modelos no lineales, en general, implica técnicas mucho más refinadas, y la solución de las ecuaciones surgidas del modelo deja mucho que desear (por ejemplo, puede ser que sólo se obtengan aproximaciones de las soluciones, o simplemente no se encuentren métodos para obtenerlas).

En este capítulo supondremos que nuestro campo base k son los números complejos $\mathbf{C}$.

1. Una aplicación en economía: el modelo de Leontief

1.1. Un modelo sencillo de comunidad económica. Consideramos una comunidad económica formada por n países $L_1, \ldots, L_n$. El país L_i produce principalmente el producto P_i. Para la producción de una unidad del producto P_j el país L_j requiere $a_{ij} \geq 0$ unidades del producto P_i. Para la producción de x_j unidades del producto P_j ($j = 1, \ldots, n$), la comunidad requiere usar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

unidades del producto P_i. Entonces, para el mercado externo (ya sea acumulación dentro de la misma comunidad o exportación a otros países), quedan

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

unidades del producto P_i.

El problema de la comunidad económica es el siguiente. Se desea satisfacer un mercado que requiere $0 \leq y_i$ unidades de P_i; esto es, un requerimiento total de $y = (y_i)$. Se busca una producción $x = (x_i)$ con $x_i \geq 0$ de forma que

$$y = (I_n - A)x,$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$ con coeficientes positivos.

Si el radio espectral $\rho(A) < 1$, entonces $(I_n - A)^{-1}$ existe y tiene entradas no negativas por (I.4.5). Luego, la solución del problema es

$$x = (I_n - A)^{-1} y,$$

que es un vector con coordenadas no negativas.

Una interpretación económica de la condición $\rho(A) < 1$ no parece ser sencilla. Sin embargo, hay otras condiciones que pueden explicarse mejor.

En el ejercicio (I.4.3–4) hemos visto que

$$\rho(A) \leq \max\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} : j = 1, \ldots, n\right\}.$$

Luego, si $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ para cada $1 \leq j \leq n$, se tiene que $\rho(A) < 1$ y nuestro problema tiene solución. Esta condición tiene una sencilla interpretación económica. Supongamos que medimos la producción en unidades monetarias (digamos dólares), de manera que para producir un dólar de producto P_j el país L_j necesita invertir a_{ij} dólares en el producto P_i, luego para producir un dólar del producto P_j el país L_j hace una inversión total de $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ dólares. La condición $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ nos dice que el sistema económico resulta rentable para el país L_j. Luego, el problema planteado para la comunidad tiene solución cuando todos los países tienen alguna ganancia.

En el capítulo IV examinaremos algunos problemas similares.

Ejercicio: La siguiente situación la presenta W. Leontief en su estudio sobre la economía de Estados Unidos en 1958. Hemos simplificado los datos para hacer más sencillo el tratamiento numérico.

Dividimos la economía en 4 sectores: industria básica (B), manufacturas (M), energía (E) y servicios (S). Las demandas internas de la economía de Estados Unidos serán

	B	M	E	S
B	0.88	0.57	0.022	0.024
M	0.048	0.47	0.004	0.055
E	0.065	0.008	0.358	0.025
S	0.227	0.19	0.173	0.235

Por ejemplo la entrada (M, E), que tiene un valor de 0.004, significa que para producir un dólar de energía se requiere gastar 0.004 dólares en productos manufacturados. Leontief calculó que la demanda externa sobre la economía de Estados Unidos era en 1958 (en millones de dólares): básicos (48,000), manufacturas (175,000), energía (23,500) y servicios (264,000).

¿Cuáles son los requerimientos en cada sector para satisfacer la economía? La matriz A asociada al problema, ¿tiene $\rho(A) < 1$? ¿Cuál era el sector de la economía estadounidense con mayores dificultades?

1.2. Consideremos brevemente el problema de la solución de ecuaciones de la forma

$$y = Bx,$$

donde $y_i \geq 0$ para las coordenadas del vector $y = (y_i)$. Nos interesan en particular matrices de la forma $B = I_n - A$, donde A es una matriz con coeficientes no negativos, como en el modelo de Leontief.

Decimos que una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times n$ tiene *diagonal dominante* si existen escalares $d_1, \ldots, d_n > 0$ tales que $d_j \|a_{jj}\| > \sum_{i \neq j} d_i \|a_{ij}\|$, para $j = 1, \ldots, n$.

Ejemplos

(a) Si A es una matriz diagonal invertible, entonces A tiene diagonal dominante.

(b) Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$ con entradas no negativas y tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$ para toda $1 \leq i \leq n$, entonces la matriz $B = I_n - A$ tiene diagonal dominante. Ésta es la situación que hemos considerado en el modelo de Leontief.

Ejercicio: Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que una matriz real 2×2 tenga diagonal dominante.

Lema. *Si A es una matriz con diagonal dominante, entonces A es invertible.*

Demostración: Supongamos que $A = (a_{ij})$ es una matriz de tamaño $n \times n$. Sea $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ la matriz diagonal tal que $d_j > 0$ y $d_j \|a_{jj}\| > \sum_{i \neq j} d_i \|a_{ij}\|$, $j = 1, \ldots, n$. Bastará con probar que la matriz $(b_{ij}) = B = DA$ es invertible. Si no lo fuera, tendríamos un vector $0 \neq x = (x_i)_i$ con $x^T B = 0$. Permutando adecuadamente los renglones de B, podemos suponer que $\|x_1\| = \|x_2\| = \cdots = \|x_s\| > \|x_{s+1}\| \geq \cdots \geq \|x_n\|$. Como $-x_1 b_{11} = \sum_{j=2}^{n} x_j b_{1j}$, entonces

$$\|x_1\| \, \|b_{11}\| \leq \sum_{j=2}^{n} \|x_j\| \, \|b_{1j}\| \leq \|x_1\| \left(\sum_{j=2}^{n} \|b_{1j}\| \right),$$

lo que implica

$$d_1 \|a_{11}\| = \|b_{11}\| \leq \sum_{j=2}^{n} d_j \|a_{j1}\|,$$

que es una contradicción. □

1.3. Una consecuencia directa de (1.2) es el siguiente:

Corolario. *Sea A una matriz con diagonal dominante negativa, entonces los valores propios de A tienen parte real negativa.*

Demostración: Sea λ un valor propio de $A = (a_{ij})$. Si λ tiene parte real no negativa, entonces $\|a_{ii} - \lambda\| \geq |a_{ii}|$, ya que $a_{ii} < 0$, de donde la matriz $A - \lambda I_n$ tiene diagonal dominante. Entonces $A - \lambda I_n$ es invertible, lo cual es absurdo dado que λ es valor propio de A. □

Por (I.5.9) podemos reformular este corolario diciendo que una matriz A con diagonal dominante negativa determina un sistema estable $y'(t) = Ay(t)$.

1.4. Teorema. *Sea $B = (b_{ij})$ una matriz real $n \times n$ con elementos diagonales $b_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq n$ y $b_{ij} \leq 0$, para $i \neq j$. Entonces son equivalentes:*

a) *Para todo vector $y \geq 0$, el sistema*

$$Bx = y$$

tiene una única solución $x \geq 0$.

b) *La matriz B tiene diagonal dominante.*

Demostración: Supongamos que B tiene diagonal dominante.

Sean $d_1, \ldots, d_n > 0$ tales que $d_j b_{jj} > -\sum_{i \neq j} d_i b_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. Por (1.2), B es invertible; entonces para un vector $y \geq 0$ dado, existe un único vector real x tal que $Bx = y$. Podemos suponer que $x_1 \geq \cdots \geq x_s \geq 0 \geq x_{s+1} \geq \cdots \geq x_n$.

Consideremos las igualdades $\sum_{j=1}^{s} b_{ij}x_j + \sum_{j=s+1}^{n} b_{ij}x_j = y_i,\ i = 1,\ldots,n$. Multiplicando por d_i y sumando, obtenemos:

$$\sum_{i=s+1}^{n}\sum_{j=1}^{s} d_i b_{ij} x_j + \sum_{i=s+1}^{n}\sum_{j=s+1}^{n} d_i b_{ij} x_j = \sum_{i=s+1}^{n} d_i y_i \geq 0.$$

El primer sumando es menor o igual a cero; el segundo sumando puede escribirse

$$\sum_{j=s+1}^{n}\left(\sum_{i=s+1}^{n} d_i b_{ij}\right) x_j \leq \sum_{j=s+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i b_{ij}\right) x_j$$

que es negativo, a menos que $s = n$. Entonces se debe tener $x \geq 0$.

Supongamos ahora que la condición (a) se satisface. Tomando cualquier vector $y > 0$, obtenemos un vector $x \geq 0$ con $Bx = y$. Para $1 \leq j \leq n$, $b_{jj}x_j \geq \sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_j = y_i > 0$. Luego $x > 0$. Esto nos dice que la matriz transpuesta B^T tiene diagonal dominante. Por la implicación que ya hemos mostrado, B^T satisface la condición (a). El argumento anterior implica entonces que $B = (B^T)^T$ tiene diagonal dominante. □

1.5. Podemos reformular ahora el modelo de Leontief: tenemos n entidades económicas $L_1,\ldots,L_n$ (países, fábricas, o cualquier otra cosa). La entidad L_i fabrica el producto P_i. Para la producción de una unidad del producto P_j se requieren $a_{ij} \geq 0$ unidades del producto P_i. El problema de la comunidad económica es satisfacer un mercado que requiere $0 \leq y_i$ unidades del producto P_i, $1 \leq i \leq n$. Es decir, se desea encontrar un vector $0 \leq x$ tal que $(I_n - A)x = y$, donde $A = (a_{ij})$.

Haciendo $B = I_n - A$, vemos que este problema tiene solución para cualquier demanda $y \geq 0$ si y solamente si B tiene diagonal dominante. Los números $d_1,\ldots,d_n > 0$, tales que $d_j b_{jj} > -\sum_{i\neq j} d_i b_{ij}$, pueden interpretarse como precios que hacen rentable la producción para todas las entidades $L_1,\ldots,L_n$. En efecto, si d_j es el precio por unidad del producto P_j, entonces la ganancia de L_j por unidad de producción de P_j es

$$d_j(1 - a_{jj}) - \sum_{i\neq j} d_i a_{ij} > 0.$$

1.6. Observemos que una matriz $A = (a_{ij})$ tiene diagonal dominante si y solamente si la matriz real $B = (b_{ij})$, con $b_{ii} = \|a_{ii}\|$ y $b_{ij} = -\|a_{ij}\|$ para $i \neq j$, tiene también diagonal dominante. Llamaremos a B la *matriz de comparación* de A.

Una matriz $B = (b_{ij})$ real de tamaño $n \times n$ se llama una M*-matriz* si $b_{ii} \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$, $b_{ij} \leq 0$ $(i \neq j)$ y todos sus menores principales son positivos. En los párrafos siguientes estudiaremos con detalle las M-matrices y algunas de sus propiedades.

Teorema. *Una matriz cuadrada A tiene diagonal dominante si y solamente si su matriz de comparación B es una M-matriz.*

Demostración: Sea $B = (b_{ij})$ la matriz de comparación de $A = (a_{ij})$. Comenzamos por suponer que A (y por tanto B) tiene diagonal dominante. Elegimos números $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_s \leq n$ y formamos la matriz principal $B' = B\binom{i_1,\ldots,i_s}{i_1,\ldots,i_s}$. Para cada $\varepsilon \in [0,1]$, definimos la matriz $B'_\varepsilon = (b_{rt}^{(\varepsilon)})$ de tamaño $s \times s$ con $b_{rr}^{(r)} = b_{rr}$ y $b_{rt}^{(\varepsilon)} = \varepsilon b_{rt}$ si $r \neq t$. Claramente, B'_ε tiene diagonal dominante y por (1.2) es invertible. Entonces, la función continua

$$f\colon [0,1] \to \mathbf{R}, \quad \varepsilon \mapsto \det B'_\varepsilon$$

no toma nunca el valor 0. Como $f(0) = \det B'_0 = \prod_{r=1}^{s} b_{i_r i_r} > 0$, entonces tenemos también $\det B' = f(1) > 0$. Así, B es una M-matriz.

Para el converso supongamos que B es una M-matriz. Deseamos probar que B tiene diagonal dominante. Denotamos por B' la submatriz principal de B formada al eliminar el renglón y la columna n-ésimos de B. Como B' es también una M-matriz, por hipótesis de inducción, B' tiene diagonal dominante. Por (1.4), para cualquier escalar $0 \leq \delta \in \mathbf{R}$, existe un vector solución $0 \leq x^\delta \in \mathbf{R}^{n-1}$ que satisface

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^\delta b_{ij} = -b_{nj} + \delta, \qquad j = 1,\ldots,n-1.$$

Hagamos $x_n^\delta = 1$. Deseamos demostrar que $\sum_{i=1}^{n} x_i^\delta b_{ij} > 0$ $(1 \le j \le n)$ para una elección apropiada de $\delta > 0$. Para $1 \le j \le n-1$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\delta b_{ij} = \delta > 0, \qquad \text{para cualquier } \delta > 0.$$

Entonces, basta con calcular $\sum_{i=1}^{n} x_i^\delta b_{in}$. Para $\delta = 0$, las soluciones $0 \le x^0 \in \mathbf{R}^{n-1}$ pueden calcularse con la llamada regla de Kramer:

$$x_i^0 = (-1)^{i+1}\frac{\det B^{(i,n)}}{\det B'}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

donde $B^{(i,j)}$ es la submatriz de B obtenida al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz B. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0 b_{in} = b_{nn} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\frac{\det B^{(i,n)}}{\det B'} b_{in}.$$

El desarrollo por menores de $\det B$ con base en la última columna de B es precisamente $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} b_{in} \det B^{(i,n)}$. Luego, el último sumando de la expresión anterior es $\det B / \det B'$, que es positivo por hipótesis. Concluimos que $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 b_{in} > 0$. Por continuidad podemos encontrar $\delta > 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n} x_i^\delta b_{in} > 0$. Estas δ eran las que deseábamos encontrar. Nuestra matriz B tiene diagonal dominante. □

1.7. Al parecer, el término M-matriz fue introducido por Ostrowski en 1937. Posteriormente se desarrollaron estudios de estas matrices por dos grupos de investigadores, uno en economía y el otro en matemáticas. Los matemáticos tenían en mente principalmente las aplicaciones de M-matrices en criterios de convergencia y solución de sistemas de ecuaciones; mientras, los economistas estudiaban las M-matrices en relación con el modelo de Leontief de análisis económico y otros modelos económicos.

Resumimos algunas de las propiedades ya establecidas sobre las M-matrices y veremos algunas nuevas.

Teorema. *Sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times n$ con $b_{ii} \ge 0$ y $b_{ij} \le 0$ para $i \ne j$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *B es una M-matriz.*

b) *B tiene diagonal dominante.*

c) *Para todo vector $y \ge 0$, el sistema $Bx = y$ tiene una única solución $x \ge 0$.*

d) *La matriz B es de la forma $B = sI_n - C$, donde C es una matriz con entradas no negativas y $s > \rho(C)$.*

e) *La parte real de cada valor propio de B es positiva.*

Demostración: La equivalencia de (a) y (b) está probada en (1.6). La de (b) y (c) en (1.4).

Supongamos que B tiene diagonal dominante y sean $d_1, \ldots, d_n > 0$ tales que $d_j b_{jj} > -\sum_{i \ne j} d_i b_{ij} > 0$. Consideremos la matriz invertible $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ y la matriz conjugada DBD^{-1}.

Sea $s = \max\{b_{ii} : i = 1, \ldots, n\} > 0$ y definamos $C = sI_n - B$ como una matriz no negativa. Deseamos probar que $\rho(C) \le s$. Calculamos

$$\rho(C) = \rho(sI_n - DBD^{-1}) \le \max\left\{(s - b_{ii}) - \sum_{i \ne j} d_j^{-1} d_i b_{ij} : i = 1, \ldots, n\right\} < s,$$

donde la penúltima desigualdad se debe a (I.4.3).

Supongamos ahora que $B = sI_n - C$, donde $C = (c_{ij})$ es una matriz no negativa con $\rho(C) < s$. Demostraremos que B tiene diagonal dominante. Para este fin, recurriremos al importante teorema de Perron-Frobenius cuya demostración veremos en el capítulo IV; este teorema afirma que existe un vector no negativo $v \ne 0$ tal que $vC = \rho(C)v$.

Aproximamos el vector de Perron-Frobenius v por medio de vectores con todas sus coordenadas positivas. Por continuidad podemos encontrar un vector w con todas sus coordenadas positivas, tal que

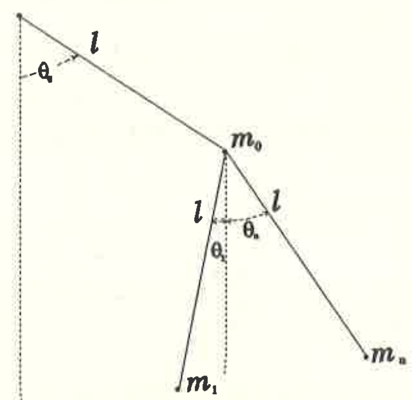
$$\rho(C) \le \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{w_j}\right) c_{ij} : j = 1, \ldots, n\right\} < s.$$

Entonces, $b_{jj} = s - c_{jj} > \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i}{w_j}\right) c_{ij} - c_{jj} = \sum_{i\neq j} \left(\frac{w_i}{w_j}\right) \|b_{ij}\|$, $j = 1,\dots,n$. Esto concluye la prueba de la equivalencia de (b) y (d).

Ejercicio: Muestre la equivalencia de (a) y (e) en el teorema anterior.

2. Una aplicación en mecánica: el péndulo múltiple

2.1. Consideraremos en esta sección un problema de mecánica clásica: el péndulo múltiple. Supongamos un sistema de objetos pequeños con masas $m_0, m_1, \dots, m_n$ unidos por medio de varillas indeformables de longitud $\ell > 0$. El sistema se mueve en el plano y está formado como se indica en el dibujo:



Éste es un ejemplo claro donde el modelo que plantearemos sólo puede ser resuelto con exactitud en el rango de ángulos pequeños $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$. En ese rango (que tendremos que definir con mayor precisión) los métodos lineales pueden aplicarse en la solución de las ecuaciones de movimiento.

Para resolver este problema necesitaremos recurrir a las ecuaciones dinámicas de Lagrange. Comencemos por plantear adecuadamente el problema: las coordenadas (x_0, y_0) del objeto de masa m_0 son:

$$x_0(t) = \ell \operatorname{sen} \theta_0(t), \quad y_0(t) = \ell \cos \theta_0(t),$$

para los objetos de masa m_j, $j = 1, \dots, n$ se tiene:

$$x_j(t) = \ell(\operatorname{sen} \theta_0(t) + \operatorname{sen} \theta_j(t)), \quad y_j(t) = \ell(\cos \theta_0(t) + \cos \theta_j(t)).$$

Las ecuaciones dinámicas de Lagrange describen el cambio de la energía potencial V y la energía de movimiento del sistema T como funciones del tiempo y de las coordenadas generalizadas θ_j y θ_j', $j = 0, \dots, n$. Para un tratamiento conveniente de los aspectos físicos y matemáticos que intervienen en el tratamiento de la mecánica lagrangiana, recomendamos [A] y [HS].

La energía de movimiento del sistema en el momento t es:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} m_j (x_j'(t)^2 + y_j'(t)^2) = \frac{\ell^2}{2}\left(\sum_{j=0}^{n} m_j\right)\theta_0'(t)^2 \\ &+ \frac{\ell^2}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j [\theta_j'(t)^2 + 2\cos(\theta_0(t) - \theta_j(t))\theta_0'(t)\theta_j'(t)], \end{aligned}$$

y la energía potencial es

$$\begin{aligned} V(t) &= -m_0 g y_0(t) - \sum_{j=1}^{n} m_j g y_j(t) \\ &- g\ell\left[\left(\sum_{j=0}^{n} m_j\right)\cos\theta_0(t) - \sum_{j=1}^{n} m_j \cos\theta_j(t)\right]. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange nos indican que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta_j'} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \theta_j} \qquad j = 0, \dots, n.$$

Si escribimos $m = \sum_{j=0}^{n} m_j$ para la masa total del sistema, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta_0'} = \ell^2(m_0+m)\theta_0''(t) + \ell^2\sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d}{dt}(\cos\theta_0(t) - \theta_j'(t))\theta_j'(t)$$

$$= \ell^2(m_0+m)\theta_0''(t) + \ell^2\sum_{j-1}^{n} m_j[\cos(\theta_0(j) - \theta_j(t))\theta_j''(t) -$$

$$- \operatorname{sen}(\theta_0(t) - \theta_j(t))(\theta_0'(t) - \theta_j'(t))\theta_j'(t)]$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial\theta_0} = -\ell^2\sum_{j=1}^{n} m_j \operatorname{sen}(\theta_0(t) - \theta_j(t))\theta_0'(t)\theta_j'(t)$$

$$- g\ell(m_0+m)\operatorname{sen}\theta_0(t).$$

Para $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta_j'} = \ell^2 m_j[\theta_j''(t) - \operatorname{sen}(\theta_0(t) - \theta_j(t))(\theta_0'(t) - \theta_j'(t))\theta_0'(t)$$

$$+ \cos(\theta_0(t) - \theta_j(t))\theta_0''(t)]$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial\theta_j} = \ell^2 m_j \operatorname{sen}(\theta_0(t) - \theta_j(t))\theta_0'(t)\theta_j'(t) - m_j g\ell \operatorname{sen}\theta_j(t).$$

Podremos resolver estas ecuaciones sólo en el rango de ángulos muy pequeños. En efecto, *supondremos* que tanto los ángulos $\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$, $\ldots$, $\theta_n(t)$, como los cambios en ellos $\theta_0'(t)$, $\theta_1'(t)$, $\ldots$, $\theta_n'(t)$, son tan pequeños que podemos identificar $\operatorname{sen}\theta_i(t), \cos\theta_i(t)$ con los primeros términos de la expansión de la correspondiente serie de Taylor. Esto es, sustituimos

$$\cos(\theta_0(t) - \theta_j(t)) \sim 1, \ \operatorname{sen}\theta_0(t) \sim \theta_0(t), \ \operatorname{sen}\theta_j(t) \sim \theta_j(t),$$

$$\operatorname{sen}(\theta_0(t) - \theta_j(t))\theta_0'(t) \sim \operatorname{sen}(\theta_0(t) - \theta_j(t))\theta_j'(t)$$

$$\sim \operatorname{sen}(\theta_0(t) - \theta_j(t))\theta_0'(t)\theta_j'(t) \sim 0.$$

Obtenemos entonces el sistema

$$(m_0+m)\theta_0''(t) + \sum_{j=1}^{n} m_j\theta_j''(t) = -(m_0+m)\frac{g}{\ell}\theta_0(t)$$

$$\theta_0''(t) + \theta_j''(t) = -\frac{g}{\ell}\theta_j(t), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Este sistema puede reescribirse como

$$M\theta''(t) + A\theta(t) = 0,$$

donde las matrices anteriores están dadas de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} m_0+m & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ m_n & 0 & & m_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0(t) \\ \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{pmatrix}'' + \frac{g}{\ell}\begin{bmatrix} m_0+m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0(t) \\ \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Las matrices M y A son no negativas y simétricas.

En las siguientes secciones resolveremos este tipo de sistema de ecuaciones diferenciales.

2.2. Teorema. *Sea dado el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$My''(t) + Ay(t) = 0,$$

donde M y A son matrices simétricas positivas definidas. Entonces:

a) *Todos los valores propios de $M^{-1}A$ son reales y positivos.*

b) *Sean $\omega_1^2, \ldots, \omega_r^2$ todos los valores propios diferentes de $M^{-1}A$. Para cada $i = 1, \ldots, r$, hay dos vectores linealmente independientes z_{i1}, z_{i2} tales que*

$$M^{-1}Az_{i_\ell} = \omega_i^2 z_{i_\ell}, \qquad \ell = 1, 2.$$

c) *Una solución del sistema está dada por*

$$y(t) = \sum_{j=1}^{r}(z_{j1}e^{i\omega_j t} + z_{j2}e^{-i\omega_j t}).$$

Demostración: (a) Consideremos la matriz inversa M^{-1} que es real y simétrica. Sea $0 \neq x \in \mathbf{R}^n$ y supongamos que $0 \neq v = M^{-1}x \in \mathbf{R}^n$. Entonces

$$x^T M^{-1} x = v^T M^T M^{-1} M v = v^T M^T v > 0,$$

ya que M es positiva definida. En otras palabras, M^{-1} es también positiva definida.

Por supuesto, esto implica que la matriz $M^{-1}A$ es simétrica positiva definida. En el Lema 5.8 del capítulo I hemos probado que entonces los valores propios de $M^{-1}A$ son reales y positivos. Además, como probaremos en el capítulo III, toda matriz simétrica (en particular, la matriz $M^{-1}A$) es diagonalizable.

Sean $\omega_1^2, \ldots, \omega_r^2$ los diferentes valores propios de A. Claramente, si $0 \neq y_j$ es un vector real tal que $M^{-1}Ay_j = \omega_j^2 y_j$, entonces iy_j es otro vector propio de $M^{-1}A$ con valor propio ω_j^2.

Para resolver el sistema $y''(t) + M^{-1}Ay(t) = 0$, hagamos

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}A & 0 \end{bmatrix},$$

de forma que $z'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y'(t) \\ -M^{-1}Ay(t) \end{bmatrix} = Cz(t).$

Por (I.5.4) la solución de este sistema es

$$z(t) = e^{tC} z(0),$$

de manera que, para calcular una solución $y(t)$ de nuestro sistema, es conveniente calcular la forma de Jordan de C. Esto haremos en (2.3), en donde además concluiremos la prueba del teorema.

2.3. Lema. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Consideremos la matriz $\tilde{A}$ de tamaño $2n \times 2n$:*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *El polinomio característico de $\tilde{A}$ es $\chi_{\tilde{A}}(t) = \chi_A(t^2)$. De modo que si $a_1, \ldots, a_r$ son los valores propios de A, entonces $\pm\sqrt{a_1}, \ldots, \pm\sqrt{a_r}$ son los valores propios de $\tilde{A}$.*

b) *Si A es diagonalizable con valores propios $a_1 = \cdots = a_s = 0$ y $a_j \neq 0$, $j = s+1, \ldots, r$, entonces la forma de Jordan de $\tilde{A}$ es*

$$J_2(0)^s \oplus (\sqrt{a_{r+1}}) \oplus (-\sqrt{a_{r+1}}) \oplus \cdots \oplus (\sqrt{a_s}) \oplus (-\sqrt{a_s}).$$

En particular, si A es también invertible, entonces $\tilde{A}$ es diagonalizable.

Demostración: (a) El polinomio característico de $\tilde{A}$ es

$$\chi_{\tilde{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} tI_n & -I_n \\ -A & tI_n \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & tI_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} tI_n & -I_n \\ -A & tI_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tI_n & -I_n \\ 0 & t^2I_n - A \end{bmatrix},$$

entonces $t^n \chi_{\tilde{A}}(t) = t^n \det(t^2 I_n - A)$ y

$$\chi_{\tilde{A}}(t) = \det(t^2 I_n - A) = \chi_A(t^2).$$

(b) Sea T una matriz invertible tal que

$$D = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_r),$$

donde $a_1 = \cdots = a_s = 0$ y $a_j \neq 0$, $j = s+1, \ldots, r$. Definimos entonces

$$S = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix},$$

matriz invertible tal que

$$B = S^{-1}\tilde{A}S = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ D & 0 \end{bmatrix}.$$

Veamos cómo actúa B en la base canónica $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$:

$$Be_j = a_j e_{n+j}, \quad Be_{n+j} = e_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Luego, tenemos una descomposición

$$\mathbf{C}^{2n} = \langle e_1, e_{n+1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_n, e_{2n}\rangle$$

en subespacios B-invariantes, donde $\langle e_j, e_{n+j}\rangle = \mathbf{C}e_j \oplus \mathbf{C}e_{n+j}$. Si $j \leq r$, $Be_j = 0$ y $Be_{n+j} = e_j$, luego la restricción de B a $\langle e_j, e_{j+n}\rangle$ es $J_2(0)$. Si $r+1 \leq j \leq n$, $B(e_j + \alpha e_{j+n}) = \alpha(e_j + \alpha e_{j+n})$, para $\alpha = \pm\sqrt{a_j}$. De manera que la forma de Jordan de B es la deseada. □

Para concluir la prueba del teorema (2.2), observemos que por ser $-M^{-1}A$ invertible, la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}A & 0 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable con valores propios $\pm\omega_1, \ldots, \pm\omega_r$. Por (I.5.4), las soluciones de $z'(t) = Cz(t)$ tienen la forma

$$z(t) = \sum_{j=1}^{r} (f_{j1}e^{i\omega_j t} + f_{j2}e^{-i\omega_j t})$$

para vectores $f_{j1}, f_{j2} \in \mathbf{C}^{2n}$. Luego las soluciones $y(t)$ de la ecuación $y''(t) + M^{-1}Ay(t) = 0$ tienen la forma deseada.

Ejercicio: Calcule las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$y^{(m)} = Ay,$$

donde $y^{(m)}$ denota el vector $\left(\frac{d^m y_1}{dt^m}, \ldots, \frac{d^m y_n}{dt^m}\right)$.

2.4. Para aplicar el Teorema (2.2) a la ecuación

$$M\theta''(t) + A\theta(t) = 0$$

del péndulo múltiple, debemos demostrar que las matrices M y A son positivas definidas. Por supuesto, A lo es, pues es diagonal positiva. Para M aplicamos el Criterio de Jacobi (I.5.8). Para ello basta con ver que los menores principales $\det M\binom{1,\ldots,i}{1,\ldots,i}$ para $i = 1, \ldots, n+1$, son

positivos. Esto es obvio para $i = 1, \ldots, n$, y para $n+1$ un cálculo simple muestra que $\det M = m_0 \cdot m_1 \cdots m_n > 0$.

Calcularemos ahora las *frecuencias de oscilación* $\pm\omega_1, \ldots, \pm\omega_r$ que aparecen en la solución del sistema $M\theta''(t) + A\theta(t) = 0$ del péndulo múltiple.

Las frecuencias de oscilación son las raíces de la ecuación

$$\det(t^2 I_n - M^{-1}A) = 0.$$

Equivalentemente, $\omega = \sigma^{-1}$ es frecuencia de oscilación si σ es raíz de la ecuación

$$\det(t^2 I_n - A^{-1}M) = 0.$$

La matriz $A^{-1}M$ es fácilmente calculable. De hecho:

$$A^{-1}M = \frac{\ell}{g}\begin{bmatrix} 1 & \frac{m_1}{m_0+m} & \cdots & \frac{m_n}{m_0+m} \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Como el rango de $\frac{\ell}{g} I_n - A^{-1}M$ es a lo más 2, entonces $\frac{\ell}{g}$ es un valor propio de $A^{-1}M$ con multiplicidad al menos $n-2$. Llamamos a y b a los otros dos posibles valores propios de $A^{-1}M$.

Tenemos:

$$a + b - 2\frac{\ell}{g} = \operatorname{tr}\left(A^{-1}M - \frac{\ell}{g} I_n\right) = 0.$$

Calculando el cuadrado de la matriz $\left(A^{-1}M - \frac{\ell}{g} I_n\right)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{2m}{m_0 + m} &= \operatorname{tr}\left(A^{-1}M - \frac{\ell}{g} I_n\right)^2 \\ &= \operatorname{tr}\left[(A^{-1}M)^2 - 2\frac{\ell}{g}A^{-1}M + \left(\frac{\ell}{g}\right)^2 I_n\right] \\ &= a^2 + b^2 + (n-2)\left(\frac{\ell}{g}\right)^2 - 2(a+b)\frac{\ell}{g} \\ &\quad - 2(n-2)\left(\frac{\ell}{g}\right)^2 + n\left(\frac{\ell}{g}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{2m}{m_0 + m} = a^2 + b^2 - 2\left(\frac{\ell}{g}\right)^2.$$

De donde se obtiene que

$$a = \frac{\ell}{g}\left(1 + \sqrt{\frac{m}{m_0 + m}}\right), \qquad b = \frac{\ell}{g}\left(1 - \sqrt{\frac{m}{m_0 + m}}\right).$$

Las frecuencias de oscilación son por tanto:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \qquad -\omega_0 = -\sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

y en caso de que $n \geq 2$, también lo son

$$\sqrt{\frac{g/\ell}{1 \pm \sqrt{\frac{m}{m_0+m}}}}.$$

Ejercicios

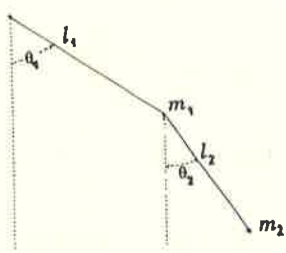
1. Analice lo que sucede con las frecuencias de oscilación en el caso en que:

(a) ℓ es muy grande.

(b) m_0 es muy pequeña en relación con m.

(c) $n = 2$ (péndulo doble).

2. Estudie el movimiento de las masas m_1 y m_2 para el péndulo doble plano como en la figura.



Analice cómo varían las frecuencias de oscilación con los parámetros ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2.