Programación 3
Año 2023

Práctico 1

Ejercicio 1.

(a) Kleinberg & Tardos, Ex. 1.2

Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, dé una breve explicación. Si es falsa, dé un contraejemplo.

Consideramos una instancia del problema de emparejamiento estable en la que existe un par (m, w) *tal que* m *está primero en la lista de preferencias de* w *y* w *está primero en la lista de preferencias de* m*. Entonces, el par* (m, w) *pertenece a toda solución* S *para esta instancia del problema.*

(b) Dé un instancia (mínima) del problema de emparejamiento estable para la cual hay más de un emparejamiento estable. Justifique cómo se obtiene.

Ejercicio 2 (Primer parcial de 2019)**.** Considere una instancia del problema de emparejamiento estable entre un conjunto $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y otro $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, con listas de preferencias dadas por las siguientes tablas. A modo de ejemplo, m_1 prefiere en primer lugar a w_1, mientras que para w_1 la mejor opción es m_4.

m_1	w_1	w_2	w_3	w_4
m_2	w_1	w_4	w_3	w_2
m_3	w_2	w_1	w_3	w_4
m_4	w_4	w_2	w_3	w_1

w_1	m_4	m_3	m_1	m_2
w_2	m_2	m_4	m_1	m_3
w_3	m_4	m_1	m_2	m_3
w_4	m_3	m_2	m_1	m_4

(a) Presente una sucesión de formaciones y separaciones de parejas que se realizan a lo largo de una ejecución del algoritmo de Gale-Shapley.

(b) Repita la parte (a) invirtiendo los roles de M y W.

(c) Note que el emparejamiento estable que se forma en las partes anteriores es el mismo (a menos del orden en que se listan los componentes de cada pareja). Muestre que, en esta instancia del problema, para toda persona se verifica que su mejor pareja válida coincide con su peor pareja válida. ¿Qué resultados del libro está aplicando?

(d) Concluya que para esta instancia del problema existe una **única** solución.

Ejercicio 3 (Kleinberg & Tardos, Ex. 1.4)**.** Antes de que el artículo de Gale y Shapley fuera publicado, un algoritmo similar al que ellos presentaron ya estaba siendo utilizado para asignar estudiantes de medicina a diferentes hospitales para realizar su residencia. En esta versión del problema existe un conjunto H de m hospitales y un conjunto E de n estudiantes. Los hospitales tienen listas de preferencias sobre E y los estudiantes tienen listas de preferencias sobre H. Cada hospital h dispone de un cupo $C(h)$ de lugares para contratar estudiantes y se cumple que

$$\sum_{h \in H} C(h) \leq n \,,$$

de modo que todos los hospitales pueden llenar sus plazas, pero puede que no sea posible satisfacer a todos los estudiantes.

Nuestro objetivo es asignar estudiantes a hospitales, ocupando todas las plazas disponibles, de tal forma que no ocurre ninguno de los tipos de inestabilidad que se definen a continuación.

- Inestabilidad de tipo 1: Existen estudiantes e, e' y un hospital h tales que
  - e está asignado a h,
  - e' está libre,
  - h prefiere a e' antes que a e.
- Inestabilidad de tipo 2: Existen estudiantes e, e' y hospitales h, h' tales que
  - e está asignado a h,
  - e' está asignado a h',
  - h prefiere a e' antes que a e,
  - e' prefiere a h antes que a h'.

Demuestre que para toda instancia del problema existe una *asignación estable*, es decir, una asignación libre de inestabilidades de tipo 1 y 2, y dé un algoritmo para obtener una.

Sugerencia: Adapte el algoritmo de Gale-Shapley, haciendo que los hospitales asuman el rol de proponente. Analice la corrección de este algoritmo siguiendo una estrategia similar a la que usamos para analizar el algoritmo de Gale-Shapley. En particular:

1. Muestre que su algoritmo termina.
2. Muestre que, cuando termina, todas las plazas de hospitales están ocupadas.
3. Muestre que la asignación construida no tiene inestabilidades de tipo 1.
4. Muestre que la asignación construida no tiene inestabilidades de tipo 2.