CLASE 14 AGOSTO

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

3. (Primer parcial segundo semestre 2023) Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1 + y^2(x))$$

con la condición inicial $y(0) = 0$. Entonces:

(A) $y(\sqrt{2}) = -e$
(B) $y(\sqrt{2}) = \tan(1 + e^2)$
(C) $y(\sqrt{2}) = \tan(1)$
(D) $y(\sqrt{2}) = 1$
(E) $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-2} - 1)$

Primero, reescribimos la ecuación de manera que los términos en y' queden separados:

$$y'(x) = -\frac{2x \cdot (1 + y^2(x))}{e^{x^2}}$$

Esta es una ecuación diferencial separable. Podemos reordenar los términos para separar las variables y y x:

$$\frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{2x}{e^{x^2}}\, dx$$

Ahora, integramos ambos lados:

$$\int \frac{1}{1 + y^2}\, dy = -\int \frac{2x}{e^{x^2}}\, dx$$

La integral del lado izquierdo es una integral estándar:

$$\arctan(y) = -\int \frac{2x}{e^{x^2}}\, dx$$

Para el lado derecho, hacemos un cambio de variable $u = x^2$, lo que implica $du = 2x\, dx$:

$$\arctan(y) = -\int \frac{1}{e^u}\, du$$

La integral en el lado derecho se simplifica a:

$$\arctan(y) = -\int e^{-u}\, du = -\left(-e^{-u}\right) + C = e^{-x^2} + C$$

Entonces tenemos:

$$\arctan(y) = e^{-x^2} + C$$

Aplicamos la condición inicial $y(0) = 0$:

$$\arctan(0) = e^0 + C \Rightarrow 0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$$

Date: August 14, 2024.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial con la condición inicial es:

$$\arctan(y) = e^{-x^2} - 1$$

Finalmente, despejamos y para obtener la solución explícita:

$$y(x) = \tan\left(e^{-x^2} - 1\right)$$

Por lo tanto,

$$y(\sqrt{2}) = \tan\left(e^{-2} - 1\right)$$

La respuesta correcta es E

3.a.2 Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea:

$$x(x-1)y' + (1-2x)y = 0$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma estándar dividiendo ambos lados por $x(x-1)$:

$$y' + \frac{1-2x}{x(x-1)}y = 0$$

Es decir, está en la forma:

$$y' + p(x)y = 0$$

donde $p(x) = \frac{1-2x}{x(x-1)}$.

Esta es una ecuación diferencial separable. Procedemos separando las variables y y x:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1-2x}{x(x-1)}\,dx$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1-2x}{x(x-1)}\,dx$$

Para integrar el lado derecho, podemos descomponer la fracción en sumas parciales:

$$\frac{1-2x}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

Donde A y B son constantes que podemos determinar. Multiplicando por el denominador común y comparando coeficientes, obtenemos:

$$1 - 2x = A(x-1) + Bx$$

Expandiendo y agrupando términos:

$$1 - 2x = (A+B)x - A$$

De donde obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$A + B = -2 \quad \text{y} \quad -A = 1$$

Resolviendo, encontramos $A = -1$ y $B = -1$. Por lo tanto:

$$\frac{1-2x}{x(x-1)} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)$$

Así, la integral se convierte en:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\,dx$$

Al resolver nos queda:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|x-1| + C$$

donde C es la constante de integración.

Podemos combinar los logaritmos en el lado derecho:

$$\ln|y| = \ln(|x(x-1)|) + C$$

Finalmente, eliminamos el logaritmo y resolvemos para y:

$$|y| = C_1|x(x-1)|$$

donde $C_1 = e^C$ es una nueva constante positiva.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_2 x(x-1)$$

donde C_2 es una constante arbitraria.

3 b.2 Resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden no homogéneas:

$$x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$$

La euación puede escribirse

$$x(x-1)y' + (1-2x)y = -x^2$$

Sabemos que la solución de la ecuación homogénea asociada,

$$x(x-1)y' + (1-2x)y = 0,$$

es:

$$y_h = Cx(x-1)$$

donde C es una constante arbitraria.

Para encontrar la solución particular y_p de la ecuación no homogénea, utilizaremos el método de variación de parámetros. En este método, asumimos que la solución particular tiene la forma:

$$y_p = C(x) \cdot y_h = C(x) \cdot x(x-1)$$

donde $C(x)$ es una función a determinar.

Primero, calculamos la derivada de y_p usando la regla del producto:

$$y_p' = C'(x) \cdot x(x-1) + C(x) \cdot \frac{d}{dx}[x(x-1)]$$

Dado que:

$$\frac{d}{dx}[x(x-1)] = 2x - 1,$$

entonces:

$$y_p' = C'(x) \cdot x(x-1) + C(x) \cdot (2x-1)$$

Sustituimos y_p y y_p' en la ecuación diferencial no homogénea:

$$x(x-1)\left[C'(x) \cdot x(x-1) + C(x) \cdot (2x-1)\right] + (1-2x) \cdot C(x) \cdot x(x-1) = -x^2$$

Simplificando y agrupando términos:

$$C'(x)x^4 - 2C'(x)x^3 + C'(x)x^2 + x^2 = 0$$

De aquí, resolvemos para $C'(x)$:

$$C'(x) = -\frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Integramos ambos lados para encontrar $C(x)$:

$$C(x) = \int -\frac{1}{x^2 - x + 1}\, dx$$

Por lo tanto, la integral es:

$$C(x) = -\int \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + C_1$$

La solución particular es entonces:

$$y_p = (\frac{1}{x-1} + C_1)x(x-1) = x + C_1 x(x-1)$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_h + y_p$$