Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Solución Examen – 15 de febrero de 2025

MÚLTIPLE OPCIÓN

VERSIÓN 1

Primer ejercicio: “Sea $y(x)$ la solución de la ecuación diferencial...”

1	2	3	4	5
B	C	C	A	D

VERSIÓN 2

Primer ejercicio: “Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por...”

1	2	3	4	5
D	A	B	D	B

DESARROLLO

1. (**30 puntos**) Se consideran dos sucesiones de números reales positivos $a_n, b_n > 0$ tales que existe un número real $L > 0$ que cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

a) Demostrar que dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces:

$$(L-\varepsilon)\ b_n < a_n < (L+\varepsilon)\ b_n$$

Como sabemos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, por la definición de límite, sabemos que dado un $\varepsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$. Escribiendo las desigualdades asociadas al valor absoluto, tenemos que $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon$. Ahora, de cada una de las desigualdades tenemos

$$\frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \Longrightarrow a_n < (L+\varepsilon)b_n$$
$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L \Longrightarrow L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} \Longrightarrow (L-\varepsilon)b_n < a_n,$$

que es lo que se pedía demostrar.

b) Usando la parte anterior, demostrar que las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son de la misma clase. Puede utilizar **otros** criterios en la demostración, enunciándolos previamente.

Como este resultado es válido para todo $\varepsilon > 0$, podemos elegir uno de manera tal que $L - \varepsilon$ sea positivo. Por ejemplo $\varepsilon = \frac{L}{2}$. Entonces resulta $\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n$.

Ahora podemos utilizar el criterio de comparación dos veces, con las dos desigualdades. Específicamente:

Si $\sum b_n < \infty$, como $a_n \leq b_n \dfrac{3L}{2}$, el criterio de comparación afirma que $\sum a_n < \infty$.

Si por el contrario $\sum b_n$ diverge, como $b_n \dfrac{L}{2} \leq a_n$, el criterio de comparación afirma que $\sum a_n$ diverge.

Recordemos el enunciado del criterio de comparación (Proposición 3.38 en las notas):

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos, tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n > n_0$. Entonces:

- Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
- Si $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

c) Clasificar, justificando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + e^n}{2^n + n^6}$$

Observemos que el numerador es equivalente a e^n, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + e^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{e^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n} = 1.$$

De igual forma, el denominador es equivalente a 2^n, y tenemos en realidad que $\frac{n^5+e^n}{2^n+n^6}$ es equivalente a $\frac{e^n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + e^n}{2^n + n^6} \cdot \frac{2^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + e^n}{e^n} \cdot \frac{2^n}{2^n + n^6} = 1.$$

Por lo tanto basta clasificar la serie

$$\sum \frac{e^n}{2^n} = \sum \left(\frac{e}{2}\right)^n$$

que es divergente, ya que es una serie geométrica con razón mayor que uno.

---

2. (**20 puntos**) Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(e^y - 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcular, si existen, las derivadas parciales en el origen.

A partir de la definición, calculamos la derivada parcial respecto a x en el $(0, 0)$ como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

ya que $f(h, 0) = \frac{h^2(e^0-1)}{|h|} = 0$.

Como la función también se anula en el otro eje, es decir, $f(0, h) = 0$, de la misma forma tenemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

b) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

De la definición de diferenciabilidad, tenemos que comprobar si se cumple

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + r(x, y),$$

con una función resto que cumpla $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

En este caso, por los cálculos de la parte anterior, la función resto coincide con $f(x, y)$, por lo que debemos calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x^2(e^y - 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(e^y - 1)}{x^2 + y^2}.$$

Hay varias formas de calcular este límite. Una de ellas es observando que $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ está acotado entre 0 y 1 (ya que $x^2 + y^2 \geq x^2$), por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}(e^y - 1) = 0,$$

ya que $e^y - 1$ tiende a cero, y el otro factor está acotado. También se puede calcular este límite haciendo un cambio de variable a polares.

Por lo tanto la función es diferenciable en el origen.
